PACS 42.60.Da; 42.60.Fc; 42.62.Eh

Лазерный гироскоп с четырехзеркальным квадратным резонатором: формулы для моделирования динамики параметров зоны синхронизации частот встречных волн при работе прибора в режиме самопрогрева

Е.А.Бондаренко

Для лазерного гироскопа с четырехзеркальным квадратным резонатором разработана расчетная математическая модель, которая позволяет смоделировать поведение во времени параметров зоны синхронизации частот встречных волн в ситуации, когда прибор работает в режиме самопрогрева, причем его включение осуществляется при разных начальных температурах.

Ключевые слова: *лазерный гироскоп, кольцевой газовый лазер, синхронизация частот встречных волн.*

1. Введение

Среди основных типов лазерных гироскопов (ЛГ), широко применяемых на практике, можно выделить прибор на базе кольцевого газового He – Ne-лазера (отношение концентраций изотопов $[^{20}\mathrm{Ne}]:[^{22}\mathrm{Ne}] = 1:1$) с плоским N-зеркальным (N = 3, 4) резонатором, обеспечивающим генерацию линейно поляризованного в сагиттальной плоскости излучения. Накачка лазера, работающего, как правило, на длине волны $\lambda = 0.6328$ мкм, осуществляется разрядом постоянного тока по симметричной схеме один катод – два анода [1 – 3].

Согласно соотношениям (5.55) – (5.57) из работы [3], а также выражениям (6.45) – (6.47) из работы [4], при сбалансированности токов в плечах разряда, точной настройке резонатора на центр линии излучения и одинаковых потерях систему уравнений, описывающих динамику безразмерных интенсивностей I_j (j = 1, 2) и разности фаз ψ встречных волн (ВВ) такого ЛГ, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (\alpha - \beta I_1 - \theta I_2) I_1 - 2 r_2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\psi + \varepsilon_2), \\ \dot{I}_2 &= (\alpha - \beta I_2 - \theta I_1) I_2 - 2 r_1 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\psi - \varepsilon_1), \\ \dot{\psi} &= M\Omega + r_2 \sqrt{I_2/I_1} \sin(\psi + \varepsilon_2) + r_1 \sqrt{I_1/I_2} \sin(\psi - \varepsilon_1). \end{aligned} \tag{1}$$

При выводе этих уравнений учтено, что волна с индексом $j = 1$ распространяется в направлении вращения ЛГ. В системе (1) α, β, θ – коэффициенты Лэмба, характеризующие свойства активной среды; $M = (1 + K_\mathrm{a})M_\mathrm{g}$ – масштабный множитель ЛГ, определяемый в первую очередь своей геометрической составляющей $M_\mathrm{g} = 8\pi S/(\lambda L)$, однако учитывающий также и свойства среды посредством малого параметра K_a; L – периметр осевого контура; S – охватываемая им площадь; Ω – угловая скорость вращения прибора в инерциальном пространстве; r_j и ε_j – модули и аргументы комплексных интегральных коэффициентов $r_j\exp(\mathrm{i}\varepsilon_j)$ линейной связи ВВ, характеризующих их взаимодействие через обратное рассеяние излучения на зеркалах, а также поглощение и пропускание его зеркалами.

В работе [5] на основе анализа системы (1) были получены формулы для расчета параметров зоны синхронизации частот генерируемых в ЛГ встречных электромагнитных волн. Такими параметрами являются координаты $\Omega_{(-)}$ и $\Omega_{(+)}$ соответственно левой и правой границ зоны синхронизации на оси угловой скорости Ω, координата ее центра $\Omega_{(0)} = (\Omega_{(+)} + \Omega_{(-)})/2$ и полуширина этой зоны $\Omega_\mathrm{s} = (\Omega_{(+)} - \Omega_{(-)})/2$. Полученные в [5] соотношения дополняют результаты ранее выполненных теоретических работ [3, 6 – 13] и имеют вид

$$\Omega_{(\pm)} = \pm \frac{\sqrt{r_\mathrm{p}^2 + \mu^2 r_\mathrm{m}^2 \pm 2\mu(r_2^2 - r_1^2)}}{\sqrt{1-\mu^2}\,M},$$

$$\Omega_{(0)} = \frac{\sqrt{r_\mathrm{p}^2 + \mu^2 r_\mathrm{m}^2 + 2\mu(r_2^2 - r_1^2)} - \sqrt{r_\mathrm{p}^2 + \mu^2 r_\mathrm{m}^2 - 2\mu(r_2^2 - r_1^2)}}{2\sqrt{1-\mu^2}\,M}, \tag{2}$$

$$\Omega_\mathrm{s} = \frac{\sqrt{r_\mathrm{p}^2 + \mu^2 r_\mathrm{m}^2 + 2\mu(r_2^2 - r_1^2)} + \sqrt{r_\mathrm{p}^2 + \mu^2 r_\mathrm{m}^2 - 2\mu(r_2^2 - r_1^2)}}{2\sqrt{1-\mu^2}\,M}.$$

С учетом реализующегося на практике условия $|r_2 - r_1| \ll (r_1 + r_2)/2$ (см., напр., [3]) выражения (2) можно приближенно записать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} \Omega_{(\pm)} &= \Omega_{(0)} \pm \Omega_\mathrm{s}, \\ \Omega_{(0)} &= \frac{\mu(r_2^2 - r_1^2)}{\sqrt{(1-\mu^2)(r_\mathrm{p}^2 + \mu^2 r_\mathrm{m}^2)}\,M}, \\ \Omega_\mathrm{s} &= \frac{\sqrt{r_\mathrm{p}^2 + \mu^2 r_\mathrm{m}^2}}{\sqrt{1-\mu^2}\,M}, \end{aligned} \tag{3}$$

где

Е.А.Бондаренко. Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина, 03056 Киев, просп. Победы, 37, корп. 28; e-mail: ea_bndrk@ukr.net

Поступила в редакцию 16 августа 2013 г., после доработки – 14 ноября 2013 г.

$$r_{\mathrm{p}}=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\varepsilon_{12}};\ r_{\mathrm{m}}=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\varepsilon_{12}};$$
$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_1+\varepsilon_2;\ \mu=\frac{2r_1r_2\sin\varepsilon_{12}}{\alpha_{\mathrm{m}}r_{\mathrm{p}}}\ (|\mu|<1); \tag{4}$$
$$\alpha_{\mathrm{m}}=\alpha_{\mathrm{p}}\frac{1-h}{1+h};\ \alpha_{\mathrm{p}}=\alpha=\frac{c}{L}(g-\varGamma);\ h=\frac{\theta}{\beta}.$$

Здесь r_{p} и r_{m} – комбинации параметров линейной связи ВВ; α_{p} и α_{m} – обратные времена релаксации соответственно суммы и разности интенсивностей ВВ; g – линейное ненасыщенное усиление активной среды; $\varGamma$ – резонаторные потери за один проход; h – параметр, зависящий от суммарного давления смеси He–Ne [14]; μ – величина, характеризующая влияние усиления активной среды на параметры зоны синхронизации. (Выражения (2) и (3) справедливы при выполнении условия слабой связи ВВ, которое предполагает, что во всем диапазоне используемых в ЛГ рабочих токов разряда отношения $r_{\mathrm{p}}/\alpha_{\mathrm{p}}$ и $r_{\mathrm{m}}/\alpha_{\mathrm{m}}$ остаются намного меньшими единицы. В современных приборах, работающих при достаточно больших превышениях мощностью накачки порогового значения [3], указанное условие, как правило, выполняется.)

На этапе проектирования ЛГ при разработке, например, методик его испытаний в термокамере, актуальной является задача создания расчетной математической модели, которая позволила бы смоделировать поведение во времени параметров $\varOmega_{(-)}$, $\varOmega_{(+)}$, $\varOmega_{(0)}$, $\varOmega_{\mathrm{s}}$ зоны синхронизации частот ВВ прибора в ситуации, когда он включается при разных значениях начальной температуры и после этого работает в режиме самопрогрева.

В известной автору литературе такая задача детально не рассматривалась, поэтому ее решение и является целью настоящей статьи. Приведенные ниже данные могут служить дополнением к результатам ранее выполненных в этой области работ [11, 15–22].

2. Описание ЛГ

Следуя работе [3], в качестве примера выберем ЛГ с четырехзеркальным квадратным резонатором, имеющим номинальную длину плеча l = 50 мм и периметр $L = 4l$ = 200 мм. Согласно [3] такой прибор характеризуется полушириной зоны синхронизации $\varOmega_{\mathrm{s}} \approx 0.05$ град/с. Дуговая цена его импульса q_θ (разрешающая способность ЛГ по углу) составляет 2.61″, а геометрический масштабный множитель M_{g} = 496459. Гироскоп работает при суммарном давлении He–Ne-смеси 6.5 Тор и пятикратном превышении усилением g потерь $\varGamma$ (т.е. параметр относительного возбуждения $N_{\mathrm{rel}} = g/\varGamma = 5$). Чтобы не приводить (вместе с комментариями) громоздких формул для расчета малого параметра K_{a}, а также выражений для оценки величин β и θ, положим $M = M_{\mathrm{g}} = 496459$ и, кроме того, зададим $h = 0.652$.

Указанный ЛГ в качестве объекта исследования был рассмотрен в работе [23] при изучении зависимости параметров $\varOmega_{(-)}$, $\varOmega_{(+)}$, $\varOmega_{(0)}$, $\varOmega_{\mathrm{s}}$ зоны синхронизации частот ВВ от усиления g активной среды. Из этой работы мы и позаимствуем все необходимые для описания данные.

Итак, следуя [23], будем считать, что резонатор рассматриваемого ЛГ образован двумя плоскими сигнальными зеркалами (З$_1$, З$_2$) и двумя установленными на пьезокорректорах сферическими зеркалами (З$_3$, З$_4$) с радиусами кривизны R = 1000 мм (зеркала нумеруются по часовой стрелке). Для плоских зеркал З$_1$ и З$_2$ заданы следующие энергетические параметры: интегральный коэффициент светорассеяния $K^{\mathrm{f}}_{\mathrm{scat}}$ в полный телесный угол 4π ср, коэффициент потерь на поглощение $\varGamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{absorp}}$ и коэффициент полезных потерь на пропускание $\varGamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{transm}}$. Для сферических зеркал З$_3$ и З$_4$ заданы интегральный коэффициент светорассеяния $K^{\mathrm{s}}_{\mathrm{scat}}$ и коэффициент потерь на поглощение $\varGamma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{absorp}}$. Пусть, кроме того, заданы также дифракционные потери, обусловленные наличием в резонаторе ЛГ апертурной диафрагмы. Тогда суммарные потери $\varGamma$ гироскопа можно рассчитать по формулам

$$\varGamma=\varGamma_{\mathrm{mirr}}+\varGamma_{\mathrm{diffr}},$$
$$\varGamma_{\mathrm{mirr}}=2(K^{\mathrm{f}}_{\mathrm{scat}}+\varGamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{absorp}}+\varGamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{transm}}+K^{\mathrm{s}}_{\mathrm{scat}}+\varGamma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{absorp}}), \tag{5}$$

где $\varGamma_{\mathrm{mirr}}$ – потери на зеркалах; $\varGamma_{\mathrm{diffr}}$ – дифракционные потери. Так же, как и в [23], примем $K^{\mathrm{f}}_{\mathrm{scat}} = 5\times10^{-6}$, $\varGamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{absorp}} = 55\times10^{-6}$, $\varGamma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{transm}} = 60\times10^{-6}$, $K^{\mathrm{s}}_{\mathrm{scat}} = 10\times10^{-6}$, $\varGamma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{absorp}} = 50\times10^{-6}$. Тогда $\varGamma_{\mathrm{mirr}} = 360\times10^{-6}$. Кроме того, зададим $\varGamma_{\mathrm{diffr}} = 40\times10^{-6}$. В результате получим $\varGamma = 400\times10^{-6}$.

Далее, согласно формуле (7) из [23], применительно к данному резонатору ЛГ для расчета комплексных интегральных коэффициентов $r_j\exp(\mathrm{i}\varepsilon_j)$ линейной связи ВВ имеем соотношение

$$\frac{L}{c}r_j\exp(\mathrm{i}\varepsilon_j)=a_{\mathrm{f}}\Big\{\exp\Big[\mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm{f}}\pm\varphi_1\Big)\Big]+\exp\Big[\mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm{f}}\pm\varphi_2\Big)\Big]\Big\}$$
$$+\,a_{\mathrm{s}}\Big\{\exp\Big[\mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm{s}}\pm\varphi_3\Big)\Big]+\exp\Big[\mathrm{i}\Big(\frac{\pi}{2}-\chi_{\mathrm{s}}\pm\varphi_4\Big)\Big]\Big\}$$
$$+\,b_{\mathrm{f}}[\exp(\pm\mathrm{i}\varphi_1)+\exp(\pm\mathrm{i}\varphi_2)]+b_{\mathrm{s}}[\exp(\pm\mathrm{i}\varphi_3)+\exp(\pm\mathrm{i}\varphi_4)], \tag{6}$$

которое описывает результат суммирования по всем четырем зеркалам комплексных локальных коэффициентов связи этих волн. (Здесь и далее верхние арифметические знаки в формулах соответствуют j = 1, а нижние – j = 2.)

Из выражения (6) вытекают следующие результирующие соотношения для оценки величин r_j и ε_j (j = 1, 2):

$$r_j=\frac{c}{L}\sqrt{A_j^2+B_j^2},\ \varepsilon_j=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{A_j}{B_j}, \tag{7}$$

где

$$A_j=a_{\mathrm{f}}[\sin(\chi_{\mathrm{f}}\mp\varphi_1)+\sin(\chi_{\mathrm{f}}\mp\varphi_2)]$$
$$+\,a_{\mathrm{s}}[\sin(\chi_{\mathrm{s}}\mp\varphi_3)+\sin(\chi_{\mathrm{s}}\mp\varphi_4)]$$
$$+\,b_{\mathrm{f}}(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)+b_{\mathrm{s}}(\cos\varphi_3+\cos\varphi_4);$$
$$B_j=a_{\mathrm{f}}[\cos(\chi_{\mathrm{f}}\mp\varphi_1)+\cos(\chi_{\mathrm{f}}\mp\varphi_2)] \tag{8}$$
$$+\,a_{\mathrm{s}}[\cos(\chi_{\mathrm{s}}\mp\varphi_3)+\cos(\chi_{\mathrm{s}}\mp\varphi_4)]$$
$$\pm\,b_{\mathrm{f}}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)\pm b_{\mathrm{s}}(\sin\varphi_3+\sin\varphi_4).$$

В выражениях (8) фигурируют две группы параметров. Параметры первой группы – a_{f}, χ_{f}, b_{f} и a_{s}, χ_{s}, b_{s} – характеризуют индивидуальные свойства соответственно плоских и сферических зеркал. В частности, a_{f} и a_{s} – это модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи ВВ через обратное рассеяние излучения на плоских и сферических зеркалах; χ_{f} и χ_{s} – «углы потерь» на рассеяние на этих зеркалах; b_{f} – модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи ВВ через поглощение и пропускание излучения плоскими зеркалами; b_s – модули локальных комплексных безразмерных коэффициентов связи волн через поглощение сферическими зеркалами. Названные параметры будем считать известными постоянными величинами. На основании формул (8) из работы [23] (которые ради экономии места мы здесь не приводим) при заданных выше характеристиках зеркал для этих величин имеем следующие численные оценки: $a_f = 1.15\times10^{-6}$, $a_s = 1.72\times10^{-6}$, $\chi_f = 461''$, $\chi_s = 652''$, $b_f = 5.91\times10^{-8}$, $b_s = 2.72\times10^{-8}$.

Параметры же второй группы в выражениях (8) – фазовые углы φ_n ($n = 1, \ldots, 4$) – описывают влияние изменения геометрии осевого контура [24, 25] резонатора ЛГ при включении прибора и его последующей работе в режиме самопрогрева. Эти величины пока неизвестны. Забегая вперед, отметим лишь, что в указанных условиях они будут изменяться во времени (что, в свою очередь, приведет к девиациям параметров зоны синхронизации $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_s). Поэтому для решения указанной задачи необходимо получить для расчета φ_n соответствующие формулы.

3. Дополнительные сведения, требующиеся для постановки задачи

В этом разделе мы введем в рассмотрение все необходимые для формулирования задачи физические величины, дадим им определения и приведем численные оценки. Остановимся также и на обстоятельствах включения ЛГ, в частности, входящей в его состав автоматической экстремальной системы регулирования периметра (СРП).

Пусть при фиксированной базовой температуре $T_{q\lambda}$ моноблока ЛГ (например, при $T_{q\lambda} = 25\,°\mathrm{C}$) на периметре L осевого контура его резонатора укладывается целое (четное или нечетное) число q длин волн λ, т.е.

$$L = L_{q\lambda} = q\lambda = 4l. \tag{9}$$

Пусть при нагревании моноблока ЛГ на ΔT_λ градусов относительно базового значения $T_{q\lambda}$ периметр осевого контура резонатора прибора увеличится (при выключенной СРП) на величину ΔL_λ, равную одной длине волны λ, т.е.

$$\Delta L_\lambda = \lambda = L K_{\mathrm{TE}} \Delta T_\lambda. \tag{10}$$

Здесь K_{TE} – коэффициент относительного линейного температурного расширения материала, из которого изготовлен моноблок ЛГ. Будем считать, что в качестве такого материала выступает оптическое стекло марки Zerodur [3] (см. с. 3-7), для которого согласно данным работы [2] (см. с. 95) параметр $K_{\mathrm{TE}} \approx 5.27\times10^{-8}\,1/°\mathrm{C}$. Не внося большой ошибки, ниже в расчетах мы примем $K_{\mathrm{TE}} = 6.328\times 10^{-8}\,1/°\mathrm{C}$, что позволит оперировать более удобным для анализа округленным значением $\Delta T_\lambda = 50\,°\mathrm{C}$, которое (при заданном $L = 200$ мм) можно найти из (10). Параметр ΔT_λ по его физическому смыслу удобно определить как межмодовый температурный интервал ЛГ.

Пусть текущая температура T моноблока ЛГ изменяется во времени t согласно закону

$$T = T_{\mathrm{ini}} + \Delta T_{\mathrm{SW}}(t),\ T_{\mathrm{ini}} = T_{q\lambda} + \Delta T_{\mathrm{ini}},$$
$$\Delta T_{\mathrm{SW}}(t) = \Delta T_{\mathrm{SW}}^{\max}[1 - \exp(-t/\tau_{\mathrm{SW}})], \tag{11}$$

где T_{ini} – начальная температура моноблока в момент $t = 0$ включения ЛГ; ΔT_{ini} – начальное приращение температуры моноблока относительно базового значения $T_{q\lambda}$; $\Delta T_{\mathrm{SW}}(t)$ – нарастающее во времени приращение температуры моноблока (относительно T_{ini}) при работе ЛГ в режиме самопрогрева; $\Delta T_{\mathrm{SW}}^{\max}$ – максимальное приращение температуры моноблока после окончания теплового переходного процесса; τ_{SW} – постоянная времени самопрогрева моноблока. Согласно экспериментальным данным работы [3] (см. рис.4.2 на с. 3-17), для рассматриваемого прибора $\Delta T_{\mathrm{SW}}^{\max} = 7\,°\mathrm{C}$ и, ориентировочно, $\tau_{\mathrm{SW}} = 2400$ с. Эти значения мы и будем использовать ниже в расчетах.

Введенные величины позволяют перейти теперь к рассмотрению обстоятельств включения ЛГ. Итак, пусть включение прибора осуществляется в момент времени $t = 0$. При этом входящая в его состав СРП в соответствии с алгоритмом своей работы с помощью двух установленных на пьезокорректорах управляемых сферических зеркал $З_3$ и $З_4$ выполнит сначала настройку периметра L осевого контура таким образом, чтобы на нем укладывалось целое число длин волн λ, т. е. обеспечит выполнение резонансного условия

$$L = L_{(q+k)\lambda} = (q+k)\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{12}$$

а затем в течение всего времени функционирования гироскопа будет стабилизировать это значение L, непрерывно компенсируя тепловое расширение моноблока. (Примем, что СРП работает без погрешностей и выходит на режим практически мгновенно; ее поисковое движение не учитываем и берем в расчет только рабочее движение, осуществляемое с целью обеспечения максимальной мощности генерации.)

В формуле (12) сумма $q + k$ – результирующий индекс продольной рабочей моды, на которой после начальной отработки СРП будет происходить генерация, а k – «настроечный» индекс, значение которого автоматически «выбирается» или «селектируется» системой таким образом, чтобы обеспечить выполнение двойного неравенства

$$T_{q\lambda} + (k - 1/2)\Delta T_\lambda < T_{\mathrm{ini}} \leqslant T_{q\lambda} + (k + 1/2)\Delta T_\lambda. \tag{13}$$

Так, например, при заданных выше параметрах $T_{q\lambda} = 25\,°\mathrm{C}$, $\Delta T_\lambda = 50\,°\mathrm{C}$ и начальной температуре T_{ini} моноблока ЛГ из интервала 1–50 °С индекс k будет автоматически «выбран» системой равным нулю, а вот уже для значений T_{ini} из следующего интервала 51–100 °С – равным единице. Другими словами, в зависимости от начальной температуры, в первом случае генерация будет осуществляться на q-й продольной моде, когда $L = L_{q\lambda} = q\lambda$, а во втором случае – на $(q + 1)$-й моде, когда $L = L_{(q+1)\lambda} = (q + 1)\lambda$.

Строго говоря, значение M_g геометрического масштабного множителя рассматриваемого ЛГ при работе на q-й продольной моде будет несколько отличаться от соответствующего ему значения при работе на $(q + 1)$-й моде. Однако такое отличие весьма незначительно и поэтому ниже мы учитывать его не будем.

При решении задачи будем полагать, что материал, из которого изготовлен моноблок ЛГ, является однородным и изотропным, а сами тепловые деформации моноблока имеют место только в осевой плоскости резонатора прибора.

4. Постановка и решение задачи

Для рассматриваемого ЛГ требуется получить с учетом (9)–(13) такие выражения для величин φ_n ($n = 1, \ldots, 4$), фигурирующих в формулах (7), (8) для r_j и ε_j ($j = 1, 2$), которые совместно с исходными соотношениями (3), (4) позволили бы смоделировать поведение во времени параметров $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_s зоны синхронизации частот ВВ в ситуации, когда прибор работает в режиме самопрогрева, причем его включение осуществляется при разных начальных температурах.

Для расчета величин φ_n воспользуемся соотношением (9) из [23]:

$$\varphi_n = \frac{4\pi}{\lambda} S_n. \tag{14}$$

Здесь S_n – измеренное вдоль осевого контура (по часовой стрелке) расстояние между отсчетной плоскостью (расположенной в начале координат) и центром зеркала $З_n$. Начало координат выбирается на поверхности зеркала $З_1$ в точке, в которой находится центр светового пятна гауссова пучка (именно в этой точке осевой контур соприкасается с поверхностью зеркала $З_1$ и «отражается» от нее).

Для оценки величин S_n в (14) применим формулу (10) из [23]:

$$S_n = -t_n \sin\theta_n + \sum_{m=1}^{n} L_{m-1}^{(m)}, \tag{15}$$

где $L_0^{(1)} \equiv 0$, а $L_{m-1}^{(m)}$ ($m = 2, 3, 4$) – длина плеча резонатора ЛГ между зеркалами $З_{m-1}$ и $З_m$ (представляет собой измеренное вдоль осевого контура расстояние между центрами световых пятен гауссова пучка на поверхностях этих зеркал); t_n – смещение центра светового пятна гауссова пучка на поверхности зеркала $З_n$ относительно его центра (отсчитывается в осевой плоскости вправо); θ_n – половина угла между плечами резонатора ЛГ при зеркале $З_n$ (в данном случае $\theta_n = \pi/4$). Из (15) следуют соотношения:

$$S_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} t_1,\ S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} t_2 + L_1^{(2)},\ S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} t_3 + L_1^{(2)} + L_2^{(3)},$$
$$S_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} t_4 + L_1^{(2)} + L_2^{(3)} + L_3^{(4)}. \tag{16}$$

Методики расчета величин t_n и $L_{n-1}^{(n)}$ для плоских N-угольных разъюстированных (т. е. со смещенными зеркалами) резонаторов ЛГ произвольной (в плане) формы, содержащих в общем случае плоскопараллельные пластины в плечах, предложены соответственно в работах [26] и [27]. На основе этих методик применительно к рассматриваемому резонатору ЛГ в ситуации, когда при выключенной СРП все четыре зеркала вследствие теплового расширения моноблока совершают вместе с его посадочными гранями в осевой плоскости линейные, нормальные, направленные наружу перемещения на расстояния w_n, для указанных величин можно получить выражения

$$t_1 = \frac{1}{8-3\xi}[(2-\xi)(w_1 - w_3) + (6-2\xi)(w_2 - w_4)],$$
$$t_2 = \frac{1}{8-3\xi}[(6-2\xi)(-w_1 + w_3) + (2-\xi)(-w_2 + w_4)], \tag{17}$$
$$t_3 = t_4 = \frac{2}{8-3\xi}(w_1 - w_2 - w_3 + w_4)$$

и

$$L_1^{(2)} = L_3^{(4)} = l + (\sqrt{2}/2)(w_3 + w_4),$$

$$L_2^{(3)} = l + \frac{\sqrt{2}/2}{8-3\xi}[(8-2\xi)w_1 + (8-4\xi)w_2 + \xi(-w_3 + w_4)], \tag{18}$$

$$L_4^{(1)} = l + \frac{\sqrt{2}/2}{8-3\xi}[(8-4\xi)w_1 + (8-2\xi)w_2 + \xi(w_3 - w_4)],$$

где $\xi = pl$ – малый безразмерный параметр, введенный для сокращения записи; $p = 2(\sqrt{2}/R)$ – оптическая сила каждого из сферических зеркал в осевой плоскости. С учетом $l = 50$ мм, $R = 1000$ мм имеем следующие численные оценки: $p = 0.0028$ мм$^{-1}$, $\xi = 0.14$.

В результате подстановки выражений (17) и (18) в (16) получаем

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}/2}{8-3\xi}[(2-\xi)(-w_1 + w_3) + (6-2\xi)(-w_2 + w_4)],$$

$$S_2 = l + \frac{\sqrt{2}/2}{8-3\xi}[(6-2\xi)(w_1 + w_4) + (2-\xi)(w_2 + w_3)],$$

$$S_3 = 2l + \frac{\sqrt{2}/2}{8-3\xi}[(6-2\xi)(w_1 + w_4) + (10-4\xi)(w_2 + w_3)], \tag{19}$$

$$S_4 = 3l + \frac{\sqrt{2}/2}{8-3\xi}[(6-2\xi)w_1 + (10-4\xi)w_2$$
$$+ (18-7\xi)w_3 + (14-5\xi)w_4].$$

Для того чтобы воспользоваться далее формулами (19), нам потребуется выражение для периметра L осевого контура резонатора ЛГ. Периметр резонатора по определению равен сумме всех длин его плеч, т. е. $L = L_1^{(2)} + L_2^{(3)} + L_3^{(4)} + L_4^{(1)}$. Таким образом, с учетом (9) и (18)

$$L = q\lambda + \Delta L,\ \ \Delta L = \sqrt{2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4), \tag{20}$$

где ΔL – приращение периметра, обусловленное линейными нормальными перемещениями w_n всех четырех зеркал резонатора ЛГ вследствие теплового расширения моноблока при повышении его температуры T на ΔT ($\Delta T = T - T_{q\lambda}$) градусов относительно базового значения $T_{q\lambda}$.

Учитывая, что в рассматриваемом резонаторе ЛГ зеркала $З_1$ и $З_2$ являются сигнальными, а зеркала $З_3$ и $З_4$ установлены на пьезокорректорах и управляются СРП, представим величины w_n в (20) в следующем развернутом виде:

$$w_1 = w_2 = h_{\Delta T},\ \ w_3 = h_{\Delta T} - w + h_{\mathrm{PCS}},$$
$$w_4 = h_{\Delta T} + w + h_{\mathrm{PCS}}. \tag{21}$$

Здесь $h_{\Delta T}$ – перемещение каждого зеркала $З_n$ вместе с посадочной гранью моноблока вследствие приращения ΔT температуры; w – задаваемые [23] с целью начальной настройки параметров r_j, ε_j линейной связи ВВ встречнонаправленные смещения зеркал $З_3$ и $З_4$ (зеркало $З_4$ выдвигается из резонатора на расстояние w, а зеркало $З_3$ – наоборот – вдвигается в резонатор на точно такое же расстояние); h_{PCS} – управляемые СРП одинаково направленные перемещения зеркал $З_3$ и $З_4$.

Чтобы в явном виде определить закон изменения величин $h_{\rm PCS}$ в ситуации, когда СРП включается и работает в штатном режиме, подставим (21) в (20):

$$L=q\lambda+\sqrt{2}\,(4h_{\Delta T}+2h_{\rm PCS}). \qquad (22)$$

Сравнивая (22) с выражением (12), отображающим в математической форме задачу, решение которой должна обеспечивать СРП, получаем

$$(q+k)\lambda=q\lambda+\sqrt{2}\,(4h_{\Delta T}+2h_{\rm PCS}), \qquad (23)$$

откуда

$$h_{\rm PCS}=\frac{\sqrt{2}}{4}k\lambda-2h_{\Delta T}. \qquad (24)$$

Тогда, в результате подстановки (24) в (21) находим уточненные соотношения для w_n, которые уже учитывают факт штатной работы СРП:

$$w_1=w_2=h_{\Delta T},\quad w_3=\frac{\sqrt{2}}{4}k\lambda-h_{\Delta T}-w,$$
$$w_4=\frac{\sqrt{2}}{4}k\lambda-h_{\Delta T}+w. \qquad (25)$$

С учетом (25) выражения (19) принимают вид

$$S_1=\frac{k\lambda}{4}-\sqrt{2}\,h_{\Delta T}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4-\xi}{8-3\xi}w,$$

$$S_2=l+\frac{k\lambda}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4-\xi}{8-3\xi}w,$$
$$\qquad (26)$$
$$S_3=2l+\frac{k\lambda}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4-2\xi}{8-3\xi}w,$$

$$S_4=3l+k\lambda-\sqrt{2}\,h_{\Delta T}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4-2\xi}{8-3\xi}w.$$

В соотношения (26) входит номинальная длина плеча l резонатора ЛГ. На основании (9) имеем $l=q\lambda/4$. Подставляя это выражение в (26), а затем (26) в (14), находим

$$\varphi_1=\pi k-4\pi\frac{\sqrt{2}\,h_{\Delta T}}{\lambda}+2\pi\frac{4-\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}\,w}{\lambda},$$

$$\varphi_2=\pi(q+k)+2\pi\frac{4-\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}\,w}{\lambda},$$
$$\qquad (27)$$
$$\varphi_3=2\pi(q+k)-2\pi\frac{4-2\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}\,w}{\lambda},$$

$$\varphi_4=3\pi q+4\pi k-4\pi\frac{\sqrt{2}\,h_{\Delta T}}{\lambda}-2\pi\frac{4-2\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}\,w}{\lambda}.$$

Формулы (27) можно упростить, если опустить в выражении для φ_3 слагаемое $2\pi(q+k)$, а в соотношении для φ_4 отбросить $4\pi k$ и заменить $3\pi q$ на πq. В результате получаем

$$\varphi_1=\pi k-4\pi\frac{\sqrt{2}\,h_{\Delta T}}{\lambda}+\varphi_{\rm f},$$

$$\varphi_2=\pi(q+k)+\varphi_{\rm f},\quad \varphi_3=\varphi_{\rm s}, \qquad (28)$$

$$\varphi_4=\pi q-4\pi\frac{\sqrt{2}\,h_{\Delta T}}{\lambda}+\varphi_{\rm s},$$

где

$$\varphi_{\rm f}=2\pi\frac{4-\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}\,w}{\lambda},\quad \varphi_{\rm s}=-2\pi\frac{4-2\xi}{8-3\xi}\frac{\sqrt{2}\,w}{\lambda} \qquad (29)$$

– введенные в работе [23] фазовые углы, зависящие от встречнонаправленных смещений w сферических зеркал З$_3$ и З$_4$.

Теперь полученные выражения (28) необходимо дополнить расчетной формулой для $h_{\Delta T}$. С одной стороны, в случае $h_{\rm PCS}=0$ (СРП выключена) из соотношения (22) следует, что тепловое приращение периметра, обусловленное приращением ΔT температуры моноблока, составляет $4\sqrt{2}\,h_{\Delta T}$. С другой стороны, эта же величина равна $q\lambda K_{\rm TE}\Delta T$. Таким образом, $4\sqrt{2}\,h_{\Delta T}=q\lambda K_{\rm TE}\Delta T$, откуда с учетом $\Delta T=T-T_{q\lambda}$ получаем

$$h_{\Delta T}=(\sqrt{2}/8)q\lambda K_{\rm TE}(T-T_{q\lambda}). \qquad (30)$$

В результате, подставляя (30) в (28), окончательно находим

$$\varphi_1=\pi k-\pi qK_{\rm TE}(T-T_{q\lambda})+\varphi_{\rm f},\quad \varphi_2=\pi(q+k)+\varphi_{\rm f},$$
$$\varphi_3=\varphi_{\rm s},\quad \varphi_4=\pi q-\pi qK_{\rm TE}(T-T_{q\lambda})+\varphi_{\rm s}. \qquad (31)$$

Формулы (31) являются искомыми. Фигурирующая в них текущая температура T моноблока ЛГ определяется выражениями (11).

Чтобы воспользоваться соотношениями (31) при моделировании динамики параметров зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ, необходимо в первую очередь задать (или, точнее, рассчитать) два характерных значения параметра q. Это можно сделать с помощью формул

$$q=q_{\rm floor}={\rm floor}(L/\lambda),\ \ q=q_{\rm ceil}={\rm ceil}(L/\lambda), \qquad (32)$$

где $q_{\rm floor}$ и $q_{\rm ceil}$ – два различающихся на единицу целых значения параметра q, одно из которых в результате вычислений окажется четным/нечетным, а другое, наоборот, – нечетным/четным. (MATLAB-функция floor(x) действительного аргумента x возвращает значение, округленное до ближайшего целого числа $x_1\leqslant x$, в то время как функция ceil(x) – значение, округленное до ближайшего целого числа $x_2\geqslant x$.) Найденные значения параметра q следует затем подставить в формулы (31). Отметим, что результаты моделирования в первом и во втором случаях будут качественно разными.

Наконец, относительно параметра k в (31): его значение ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$) должно быть выбрано таким, чтобы при заданной начальной температуре $T_{\rm ini}$ моноблока ЛГ обеспечить выполнение двойного неравенства (13).

Таким образом, полученные в этом разделе формулы (31) для расчета величин φ_n совместно с выражениями (3), (4), (7), (8) (11), (13) и (32) образуют расчетную математическую модель, которая позволяет выполнить моделирование динамики параметров $\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(0)}$, $\Omega_{\rm s}$ зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ при его работе в режиме самопрогрева.

5. Примеры моделирования динамики полуширины зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ

К сожалению, ограничения, накладываемые на объем статьи, не позволяют привести результаты моделирования динамики всех четырех параметров ($\Omega_{(-)}$, $\Omega_{(+)}$, $\Omega_{(0)}$, Ω_s) зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ, причем в полном объеме, т.е. для всех возможных значений величин, фигурирующих в формулах (31). Поэтому мы рассмотрим лишь наиболее простой случай, когда встречнонаправленные управляемые смещения w зеркал З$_3$ и З$_4$ отсутствуют ($w = 0$), вследствие чего в (31) следует положить $\varphi_f = \varphi_s = 0$. В такой ситуации линейная связь ВВ при работе ЛГ в режиме самопрогрева будет всегда оставаться симметричной ($r_1 = r_2$) и смещение $\Omega_{(0)}$ центра зоны синхронизации частот этих волн по оси угловой скорости Ω, как это следует из (3), будет равно нулю. Таким образом, задача сведется к моделированию динамики только одного параметра зоны синхронизации – ее полуширины Ω_s.

Кроме того, с целью еще большего упрощения задачи мы ограничимся рассмотрением лишь одного случая (из двух возможных), когда при базовой температуре $T_{q\lambda}$ моноблока ЛГ на периметре осевого контура его резонатора укладывается, например, четное число длин волн λ. На основании (32) при $L = 200$ мм имеем $q_{\text{floor}} = 316055$ и $q_{\text{ceil}} = 316056$. Поэтому в (31) следует подставить $q = q_{\text{ceil}} = 316056$.

Теперь, чтобы приступить к моделированию динамики Ω_s, необходимо задать (и для удобства читателя собрать в одном месте) численные значения всех используемых в расчетах величин:

1. В формулах (3) фигурирует параметр M. Для рассматриваемого ЛГ он равен 496459.

2. В выражениях (4) фигурирует параметр α_m. Как было найдено выше, резонаторные потери Γ гироскопа составляют 400×10^{-6}. Прибор работает при пятикратном превышении усилением g потерь Γ, т.е. $g = 5\Gamma = 2000\times10^{-6}$. Поэтому на основании (4) с учетом $\alpha_p = 2400000$ с$^{-1}$ и $h = 0.652$ имеем $\alpha_m = 505810$ с$^{-1}$.

3. В соотношениях (8) величины $a_f = 1.15\times10^{-6}$, $a_s = 1.72\times10^{-6}$, $\chi_f = 461''$, $\chi_s = 652''$, $b_f = 5.91\times10^{-8}$, $b_s = 2.72\times10^{-8}$.

4. Наконец, в формулах (11), (13), (31) величины $T_{q\lambda} = 25\,°\text{C}$, $\Delta T_\lambda = 50\,°\text{C}$, $K_{\text{TE}} = 6.328\times10^{-8}$ 1/°C, $\Delta T_{\text{SW}}^{\max} = 7\,°\text{C}$, $\tau_{\text{SW}} = 2400$ с.

Результаты моделирования динамики полуширины Ω_s зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ в пяти его четырехчасовых запусках при начальных температурах моноблока $T_{\text{ini}} = 5$, 15, 25, 35 и 45 °C из интервала 1 – 50 °C приведены на рис.1. Чтобы обеспечить выполнение неравенства (13) при указанных T_{ini}, параметр k в формулах (31) был выбран равным нулю. Это означает, что во всех проведенных запусках прибор каждый раз после его включения работал на одной и той же «четной» продольной моде (поскольку ее результирующий индекс $q + k = 316056$ – четное число).

Результаты моделирования динамики Ω_s в пяти четырехчасовых запусках ЛГ при начальных температурах моноблока $T_{\text{ini}} = 55$, 65, 75, 85 и 95 °C из интервала 51 – 100 °C представлены на рис.2. При таких величинах T_{ini} параметр k в (31) был принят равным единице. Поэтому в этих запусках гироскоп каждый раз после его включения работал на одной и той же «нечетной» продольной моде

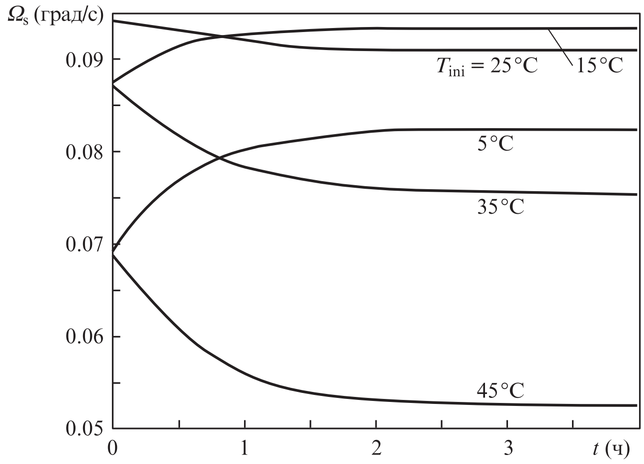

Рис.1. Результаты моделирования динамики полуширины Ω_s зоны синхронизации частот встречных волн ЛГ в пяти его четырехчасовых запусках при начальных температурах моноблока T_{ini} из интервала 1 – 50 °C для случая $k = 0$, $q = 316056$.

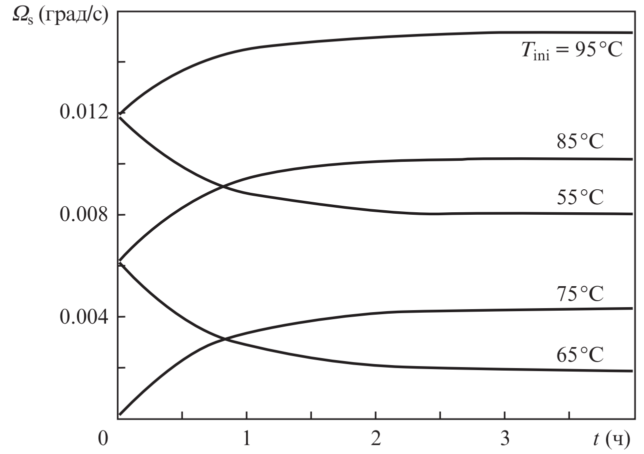

Рис.2. Результаты моделирования динамики полуширины Ω_s зоны синхронизации частот встречных волн ЛГ в пяти его четырехчасовых запусках при начальных температурах моноблока T_{ini} из интервала 51 – 100 °C для случая $k = 1$, $q = 316056$.

(поскольку ее результирующий индекс $q + k = 316057$ – нечетное число).

Из приведенных графиков видно, что полуширина Ω_s зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ при его работе в режиме самопрогрева изменяется во времени. При этом характер динамики Ω_s определяется параметром K_{TE}, законом $T = T(t)$ возрастания температуры моноблока ЛГ и, что наиболее существенно, ее начальным значением T_{ini} в момент $t = 0$ включения прибора. Эти обстоятельства следует, по-видимому, учитывать при разработке методики экспериментальной оценки величины Ω_s на этапе паспортизации параметров ЛГ.

Результаты моделирования позволяют сделать вывод о том, что измерение полуширины Ω_s зоны синхронизации частот ВВ рассматриваемого ЛГ имеет смысл проводить в широком диапазоне температур (на управляемом одноосном поворотном стенде, находящемся в термокамере). При этом наиболее достоверной оценкой величины Ω_s следует считать ее максимальное измеренное значение. Измерения Ω_s при каждом заданном стабилизированном значении температуры воздуха в камере целесообразно начинать сразу же после включения ЛГ, не дожидаясь окончания протекающих в нем тепловых переходных процессов.

6. Заключение

В настоящей работе для ЛГ с четырехзеркальным квадратным резонатором получены формулы (31), которые совместно с выражениями (3), (4), (7), (8) (11), (13) и (32) образуют расчетную математическую модель, позволяющую смоделировать поведение во времени параметров зоны синхронизации частот ВВ в ситуации, когда прибор работает в режиме самопрогрева, причем его включение осуществляется при разных начальных температурах.

1. Chow W.W., Gea-Banacloche J., Pedrotti L.M., Sanders V.E., Schleich W., Scully M.O. *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 61 (1985).
2. Wilkinson J.R. *Prog. Quantum Electron.*, **11**, 1 (1987).
3. Aronowitz F., in *Optical Gyros and their Application* (Neuilly-sur-Seine, France, RTO AGARDograph 339, 1999, p. 3-1).
4. Menegozzi L.N., Lamb W.E. Jr. *Phys. Rev.*, **8**, A2103 (1973).
5. Бондаренко Е.А. *Квантовая электроника*, **41**, 824 (2011).
6. Ланда П.С., Ларионцев Е.Г. *Радиотехника и электроника*, **15**, 1214 (1970).
7. Андронова И.А., Берштейн И.Л. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **14**, 698 (1971).
8. Ланда П.С. *Оптика и спектроскопия*, **32**, 383 (1972).
9. Зейгер С.Г., Климонтович Ю.Л., Ланда П.С., Ларионцев Е.Г., Фрадкин Э.Е. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (М.: Наука, 1974).
10. Ланда П.С. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (М.: Наука, 1980).
11. Rodloff R. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-23**, 438 (1987).
12. Хромых А.М. *Электронная техника. Сер. Лазерная техника и оптоэлектроника*, вып. 2 (54), 44 (1990).
13. Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Дмитриев В.Г. *Квантовая электроника*, **30**, 96 (2000).
14. Бирман А.Я., Петрухин Е.А., Савушкин А.Ф. *Квантовая электроника*, **6**, 2626 (1979).
15. Астахов К.В., Голяев Ю.Д., Махин П.В., Мельников А.В., Тихменев Н.В. *Гироскопия и навигация*, №2 (9), 25 (1995).
16. Астахов К.В., Батоврин В.К., Голяев Ю.Д., Дроздов М.С., Мельников А.В. *Гироскопия и навигация*, №4 (11), 24 (1995).
17. Астахов К.В., Батоврин В.К., Голяев Ю.Д., Дроздов М.С., Мельников А.В., Тихменев Н.В., Яснов С.А. *Труды IV Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам* (С.-Петербург, 1997, с. 146–152).
18. Астахов К.В., Батоврин В.К., Мельников А.В., Голяев Ю.Д., Тихменев Н.В. *Приборы и системы управления*, №3, 15 (1997).
19. Астахов К.В., Батоврин В.К., Голяев Ю.Д., Дроздов М.С., Мельников А.В., Тихменев Н.В. *Труды V Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам* (С.-Петербург, 1998, с. 194–200).
20. Молчанов А.В., Морозов Д.А., Степанов А.Ю., Чиркин М.В. *Труды XIV Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам* (С.-Петербург, 2007, с. 38–40).
21. Васин И.А., Молчанов А.В., Морозов Д.А., Чиркин М.В. *Труды XV Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам* (С.-Петербург, 2008, с. 68–70).
22. Молчанов А.В., Степанов А.Ю., Чиркин М.В. *Авиакосмическое приборостроение*, №3, 9 (2008).
23. Бондаренко Е.А. *Квантовая электроника*, **42**, 465 (2012).
24. Ищенко Е.Ф. *ЖПС*, **11**, 456 (1969).
25. Ищенко Е.Ф. *Открытые оптические резонаторы* (М.: Сов. радио, 1980).
26. Bondarenko E.A., in *Mechanics of Gyroscopic Systems* (Kiev, KPI, 2010, Issue 22, pp 22–32).
27. Бондаренко Е.А. *Квантовая электроника*, **19**, 171 (1992).