

# Согласованная динамика компонент эллиптически поляризованной волны с нулевыми средними амплитудами в изотропной гиротропной нелинейной среде в адиабатическом приближении

В.А.Макаров, В.М.Петникова, К.В.Руденко, В.В.Шувалов

*В адиабатическом приближении получено аналитическое решение неинтегрируемой задачи распространения плоской эллиптически поляризованной световой волны с нулевыми средними амплитудами ортогональных циркулярно поляризованных компонент поля через изотропную гиротропную среду с локальной и нелокальной составляющими керровской нелинейности и дисперсией групповых скоростей второго порядка. Описана аperiodическая эволюция связанных за счет нелинейности среды парных состояний, отвечающая согласованному распространению двух ортогональных поляризационных составляющих – кноидальных волн с существенно разными периодами.*

**Ключевые слова:** кубическая нелинейность, пространственная и частотная дисперсия, линейная и нелинейная гиротропия, нелинейное уравнение Шредингера, эллиптическая поляризация, адиабатическое приближение, связанные состояния, аperiodическая динамика.

## 1. Введение

Распространение плоской эллиптически поляризованной волны через изотропную среду с керровской нелинейностью и дисперсией групповых скоростей второго порядка описывается системой из двух связанных нелинейных уравнений Шредингера. В общем случае эта система неинтегрируема [1–4] и с учетом членов, ответственных за линейную и нелинейную гиротропию, имеет вид [5–7]

$$\frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} - \frac{ik_2}{2} \frac{\partial^2 A_{\pm}}{\partial t^2} + i[\mp \rho_0 + (\sigma_1/2 \mp \rho_1) |A_{\pm}|^2 + (\sigma_1/2 + \sigma_2) |A_{\mp}|^2] A_{\pm} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $A_{\pm}(z, t)$  – укороченные амплитуды компонент поля с правой и левой круговыми поляризациями и частотой  $\omega$ , распространяющихся вдоль оси  $z$ ;  $t$  – время в бегущей системе координат; константа  $k_2 = \partial^2 k / \partial \omega^2$  характеризует дисперсию;  $k$  – волновое число. Параметры  $\sigma_1 = 4\pi\omega^2 \times \chi_{xy}^{(3)} / (kc^2)$  и  $\sigma_2 = 2\pi\omega^2 \chi_{xy}^{(3)} / (kc^2)$  заданы независимыми компонентами тензора локальной кубической нелинейности  $\chi^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$ , а  $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2 \gamma_{0,1} / c^2$  определены через псевдоскалярные константы  $\gamma_{0,1}$  линейной и нелинейной гирации. Последние учитывают пространственную нелокальность указанных процессов при слабом изменении амплитуд компонент поля в направлении распространения  $z$  на масштабах длины волн.

**В.А.Макаров, В.М.Петникова, К.В.Руденко, В.В.Шувалов.** Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, и Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vsh@vsh.phys.msu.su

Поступила в редакцию 29 мая 2014 г., после доработки – 12 июля 2014 г.

Известен ряд численных [5,6] и частных аналитических [7–10] решений системы (1). Для построения ее приближенных решений использовался метод линеаризации [11,12]. Было показано, что при возбуждении одной из нормальных (синфазная или противофазная) нелинейных мод реализуется периодический режим изменения состояния поляризации – распространение эллиптически поляризованных кноидальных волн. В противном случае параметры Стокса [13] изменяются нерегулярно из-за биений, поскольку частоты этих двух мод в общем случае несоизмеримы. В [14] для решения (1) использовалось адиабатическое приближение [15–17]. В рамках последнего были построены связанные за счет нелинейности парные состояния компонент поля, соответствующие согласованному распространению двух волн – ортогонально поляризованных составляющих со знакопеременной и знакопостоянной амплитудами и существенно разными периодами.

Ниже мы также воспользуемся адиабатическим приближением, однако рассмотрим несколько иную по отношению к [14] ситуацию, в которой амплитуды обеих компонент поля знакопеременны и их средние значения равны нулю. Как известно, сигнал, в котором гармоника на нулевой частоте в фурье-спектре отсутствует, оптимален для передачи по длинной трассе. Мы покажем, что и в этом случае существуют аналогичные описанным в [14] связанные комплексы с существенно разномасштабной, но согласованной эволюцией ортогонально поляризованных компонент волны во времени, т. к. вклады последних в полную энергию системы определяются моментами второго порядка (т. е. их интенсивностями) и не обнуляются. Еще одной важной особенностью полученного далее приближенного решения является отсутствие соответствующих ему точных частных решений (1) для выбранных значений параметров нелинейности и гиротропии.

Отметим, что с практической точки зрения приведенные ниже периодические и аperiodические решения мо-

гут оказаться актуальными при конструировании длинных оптоволоконных линий связи, разработке фарадеевских элементов развязки для мощных лазеров с высокодобротными кольцевыми резонаторами и т. п.

## 2. Потенциальная энергия и адиабатическое приближение

Как и в [14], мы сразу разделим переменные, положив

$$A_{\pm}(z, t) = r_{\pm}(t) \exp(i\kappa_{\pm} z), \quad (2)$$

где  $\kappa_{\pm}$  – константы разделения и  $r_{\pm}(t)$  – искомые вещественные функции. Подставив (2) в (1), при  $k_2 \neq 0$  получим ту же, что и в [14], систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 r_{\pm}}{dt^2} = \frac{1}{k_2} [2\Delta\kappa_{\pm} + (\sigma_1 \mp 2\rho_1) r_{\pm}^2 + (\sigma_1 + 2\sigma_2) r_{\mp}^2] r_{\pm}. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta\kappa_{\pm} = \kappa_{\pm} \mp \rho_0$ . Далее переменные и параметры в (3) будут считаться безразмерными и нормированными за счет выбора единичных значений для констант, описывающих линейную гиротропию ( $\rho_0 = 1$ ), дисперсию ( $k_2 = 1$ ) и одну из компонент локальной кубической нелинейности ( $\sigma_1 = 1$ ), что эквивалентно заменам переменных  $z\rho_0 \rightarrow z$ ,  $t\sqrt{\rho_0/k_2} \rightarrow t$ ,  $r_{\pm}\sqrt{\sigma_1/\rho_0} \rightarrow r_{\pm}$ ,  $\sigma_2/\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ ,  $\rho_1/\sigma_1 \rightarrow \rho_1$  и  $\kappa_{\pm}/\rho_0 \rightarrow \kappa_{\pm}$ .

Рассматривая теперь (3) как систему, описывающую движение – эволюцию радиус-вектора  $r = \{r_-, r_+\}$  точки единичной массы, введем ее потенциальную энергию  $U(r_-, r_+)$ :

$$U(r_-, r_+) = -\frac{1}{4k_2} [4\Delta\kappa_+ r_+^2 + 4\Delta\kappa_- r_-^2 + (\sigma_1 - 2\rho_1) r_+^4 + (\sigma_1 + 2\rho_1) r_-^4 + 2(\sigma_1 + 2\sigma_2) r_+^2 r_-^2]. \quad (4)$$

В отличие от [14] нас будет интересовать точка равновесия  $r_{\text{eq}} = \{\tilde{r}_-, \tilde{r}_+\} = \{0, 0\}$ , отвечающая минимуму потенциальной энергии  $U$  вследствие определенного выбора значений параметров. Для анализа характера решений в окрестности этой точки мы воспользуемся тем же, что и в [14], методом поиска приближенных решений – адиабатическим приближением [15–17].

Малые колебания по ортогональным направлениям  $r_{\pm}$  в окрестности точки  $r_{\text{eq}} = 0$  являются нормальными модами с частотами  $\omega_{\pm}$ , заданными выражениями

$$\omega_{\pm}^2 = \left. \frac{\partial^2 U(r_-, r_+)}{\partial r_{\pm}^2} \right|_{r_{\text{eq}}} = -\frac{2}{k_2} \Delta\kappa_{\pm}. \quad (5)$$

Поэтому с учетом выбранной нормировки ( $k_2 = 1$ ) нас будут интересовать значения  $\Delta\kappa_{\pm} < 0$ , отвечающие локальному минимуму  $U$ , и такие осцилляции, частота которых по одному из этих направлений (например,  $r_-$ ) много меньше, чем по другому ( $r_+$ ), т. е.

$$\Delta\kappa_+ \ll \Delta\kappa_-. \quad (6)$$

Именно в этом случае и должно быть применимо адиабатическое приближение.

Альтернативой для интересующих нас приближенных решений системы (3) по положению точки  $r_{\text{eq}} = 0$  могли бы

стать точные частные решения sc- и cs-типов [10, 18, 19], которые могут существовать при  $\rho_1 > 0$ ,  $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) < 0$  и  $-\rho_1 < \sigma_2 < \rho_1$  и при  $\rho_1 < 0$ ,  $k_2(\rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) > 0$  и  $\rho_1 < \sigma_2 < -\rho_1$ . Однако, как мы убедились, в отличие от [14] в рассмотренном нами ниже случае для  $k_2 = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\rho_1 = -0.45$ ,  $\Delta\kappa_+ = -10$  и  $\Delta\kappa_- = -1$  таких частных решений не существует.

## 3. Решение задачи в адиабатическом приближении

В случаях, когда неравенство (6) выполнено, построение приближенных решений проводится по схеме, описанной в [14]. Сначала для выбранных значений  $\Delta\kappa_{\pm}$  мы фиксируем произвольное (допустимое) значение  $r_-$  и ищем решение для  $r_+(t)$  в выбранном классе эллиптических функций. При этом мы решаем уравнение

$$\frac{d^2 r_+}{dt^2} = \frac{1}{k_2} [2\Delta\kappa_+ + (\sigma_1 - 2\rho_1) r_+^2 + (\sigma_1 + 2\sigma_2) r_-^2] r_+, \quad (7)$$

полагая, что

$$r_+(t) = B_+ \text{sn}(v_+ t, \mu_+). \quad (8)$$

Здесь  $\text{sn}(vt, \mu)$  и  $\text{cn}(vt, \mu)$  (см. далее) – эллиптические функции Якоби с модулем  $0 \leq \mu \leq 1$  [20]. Подставив (8) в (7), найдем

$$B_+^2 = -\frac{2\mu_+^2 [2\Delta\kappa_+ + (\sigma_1 + 2\sigma_2) r_-^2]}{(1 + \mu_+^2)(\sigma_1 - 2\rho_1)}, \quad (9a)$$

$$v_+^2 = -\frac{2\Delta\kappa_+ + (\sigma_1 + 2\sigma_2) r_-^2}{k_2(1 + \mu_+^2)}. \quad (9b)$$

Один из параметров в (8), (9) (будем полагать, что это  $\mu_+$ ) остается свободным, и, следовательно, нами определено целое семейство решений соответствующего типа.

Далее мы усредняем второе уравнение системы (3) по быстрым осцилляциям  $r_+(t)$ :

$$\frac{d^2 r_-}{dt^2} = \frac{1}{k_2} [2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\rho_1) r_-^2 + (\sigma_1 + 2\sigma_2) \langle r_+^2 \rangle_t] r_-. \quad (10)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle_t$  означает усреднение по времени. Поскольку

$$\langle \text{sn}^2(v_+ t, \mu_+) \rangle_t = \frac{1}{\mu_+^2} \left[ 1 - \frac{E(\mu_+)}{K(\mu_+)} \right], \quad (11)$$

где  $K(\mu_+)$  и  $E(\mu_+)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода [20], с учетом (9a) получим

$$\langle r_+^2 \rangle_t = -\frac{2[2\Delta\kappa_+ + (\sigma_1 + 2\sigma_2) r_-^2]}{(1 + \mu_+^2)(\sigma_1 - 2\rho_1)} \left[ 1 - \frac{E(\mu_+)}{K(\mu_+)} \right], \quad (12)$$

а уравнение (10) примет вид

$$\frac{d^2 r_-}{dt^2} = \frac{1}{k_2} \left\{ 2\Delta\kappa_- - \frac{4\Delta\kappa_+(\sigma_1 + 2\sigma_2)}{(1 + \mu_+^2)(\sigma_1 - 2\rho_1)} \left[ 1 - \frac{E(\mu_+)}{K(\mu_+)} \right] + \left[ (\sigma_1 + 2\rho_1) - \frac{2(\sigma_1 + 2\sigma_2)^2}{(1 + \mu_+^2)(\sigma_1 - 2\rho_1)} \right] \left[ 1 - \frac{E(\mu_+)}{K(\mu_+)} \right] r_-^2 \right\} r_-. \quad (13)$$

Теперь мы можем найти аналитическое решение и для второй компоненты поля  $r_-(t)$  в соответствующем классе эллиптических функций. Подставив

$$r_-(t) = B_- \text{cn}(v_- t, \mu_-) \quad (14)$$

в (13), найдем

$$B_-^2 = -\{4\mu_-^2[\Delta\kappa_-(1 + \mu_-^2)(\sigma_1 - 2\rho_1)K(\mu_+)] - 2\Delta\kappa_+(\sigma_1 + 2\sigma_2)(K(\mu_+) - E(\mu_+))\} \{2\mu_-^2 - 1\} [(1 + \mu_-^2) \times (\sigma_1^2 - 4\rho_1^2)K(\mu_+) - 2(\sigma_1 + 2\sigma_2)^2(K(\mu_+) - E(\mu_+))]^{-1}, \quad (15a)$$

$$v_-^2 = \frac{2}{k_2(2\mu_-^2 - 1)} \times \left\{ \Delta\kappa_- - \frac{2\Delta\kappa_+(\sigma_1 + 2\sigma_2)}{(1 + \mu_-^2)(\sigma_1 - 2\rho_1)} \left[ 1 - \frac{E(\mu_+)}{K(\mu_+)} \right] \right\}, \quad (15b)$$

Заметим, что, хотя точка  $\mu_- = 2^{-1/2}$  в (15) и является особой, параметр  $\mu_-$  здесь также остается свободным.

Подставив (14) в (8) и (9), определим окончательное выражение для искомой согласованной эволюции быстрой циркулярно поляризованной компоненты поля в форме

$$r_+(t) = B_+ \text{sn}(v_+ t, \mu_+), \quad (16a)$$

$$B_+^2 = -\frac{2\mu_+^2[2\Delta\kappa_+ + (\sigma_1 + 2\sigma_2)B_-^2 \text{cn}^2(v_- t, \mu_-)]}{(1 + \mu_+^2)(\sigma_1 - 2\rho_1)}, \quad (16b)$$

$$v_+^2 = -\frac{2\Delta\kappa_+ + (\sigma_1 + 2\sigma_2)B_-^2 \text{cn}^2(v_- t, \mu_-)}{k_2(1 + \mu_+^2)}, \quad (16b)$$

где  $B_-^2$  и  $v_-^2$  заданы (15). Выражения (14)–(16) определяют искомое согласованное решение  $r_{\pm}(t)$  задачи (3) на первой итерации (коррекция зависимости  $r_{\pm}(t)$  до (16) подстановкой выражения (14) в (8) и (9)) расчета в адиабатическом приближении. В принципе итерационный ряд может быть продолжен [21, 22] уточнением выражения для  $\langle r_{\pm}^2 \rangle_t$ , последующей подстановкой (16) в (10) и т. д. Однако мы здесь этого делать не будем.

Еще раз напомним, что параметры  $\mu_{\pm}$  в (14)–(16) являются свободными и именно их вариации определяют семейство приближенных решений соответствующего класса. Ограничения на значения этих параметров обусловлены лишь тем, что для всех моментов времени  $t$  должно быть выполнено условие применимости адиабатического приближения. Однако поскольку спектр нелинейных колебаний является непрерывным, мы будем сравнивать квадраты их периодов, которые описывают положения максимумов спектральной плотности для соответствующих осцилляций. Так как в соответствии с [20] для решений (14) и (16) эти периоды заданы выражениями  $T_+ = 4K(\mu_+)/v_+$  и  $T_- = 4K(\mu_-)/v_-$ , вместо (6) мы получим

$$\frac{K^2(\mu_-)v_+^2}{K^2(\mu_+)v_-^2} \ll 1. \quad (17)$$

С учетом выписанных выше соотношений (15) и (16) условие (17) позволяет нам теперь выбрать такие значения  $0 < \mu_{\pm} < 1$  ( $\mu_- \neq 2^{-1/2}$ ), которые и обеспечат возможность использования адиабатического приближения.

Отметим, правда, что корректная оценка границ области применимости адиабатического приближения является вполне самостоятельной, сложной и до сих пор не до конца решенной задачей (см., напр., [32]).

#### 4. Характер полученных решений

Характер полученных приближенных решений (14)–(16) иллюстрирует рис.1, на котором в градациях серого цвета показана карта распределения  $U(r_-, r_+)$  в окрестности точки равновесия  $r_{\text{eq}} = 0$ . Значения параметров ( $k_2 = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\rho_1 = -0.45$ ,  $\Delta\kappa_+ = -10$  и  $\Delta\kappa_- = -1$ ) выбраны такими, что потенциальная яма вытянута в направлении  $r_-$ , формируя длинный «желоб». Толстой сплошной линией показана траектория  $r_+(r_-)$ , соответствующая решению (14)–(16) при  $\mu_+ = 0.3584$  и  $\mu_- = 0.95$  для  $t \in [0, 43]$ . Отметим, что альтернативного периодического точного частного решения  $\text{sc}$ -типа [8, 10] в рассматриваемом нами здесь случае (для использованного набора параметров, см. выше) не существует.

Необходимо отметить два существенных момента. Во-первых, нами рассмотрен случай возбуждения сразу двух нормальных нелинейных мод (рис.1). При этом возможность использования адиабатического приближения определяется существенным различием их частот. Поэтому решения с кратными периодами изменения  $r_{\pm}(t)$  (случай регулярной эволюции) можно считать скорее некой экзотикой. Во-вторых, траектория решения  $r_+(r_-)$  (рис.1) является классической фигурой Лиссажу [23]. Однако при независимых гармонических колебаниях фазовое пространство системы (часть плоскости  $\{r_-, r_+\}$ , заполняемая

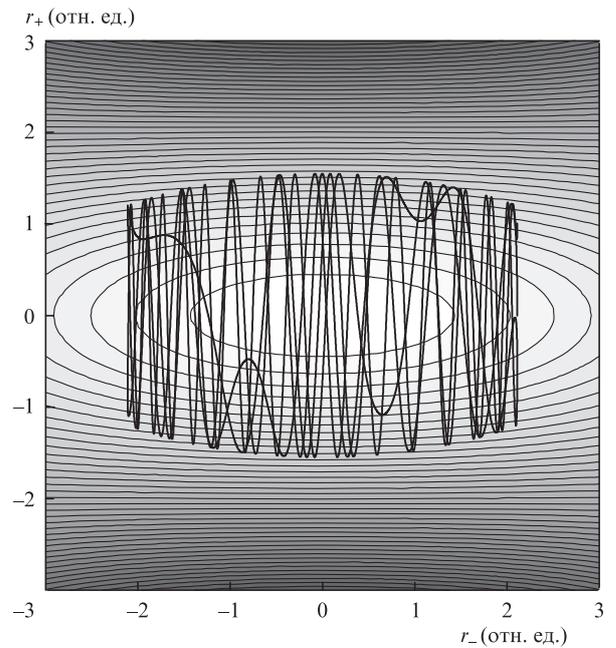


Рис.1. Карта распределения  $U(r_-, r_+)$  в градациях серого цвета в окрестности точки  $r_{\text{eq}} = 0$  при  $k_2 = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\rho_1 = -0.45$ ,  $\Delta\kappa_+ = -10$ ,  $\Delta\kappa_- = -1$ . Потенциальная яма вытянута в направлении  $r_-$ . Толстая сплошная линия – траектория  $r_+(r_-)$ , соответствующая решению (14)–(16) при  $\mu_+ = 0.3584$  и  $\mu_- = 0.95$  для  $t \in [0, 43]$ .

в процессе эволюции  $r_{\pm}(t)$  представляла бы собой прямоугольник [23]. При согласованной эволюции компонент поля  $r_{\pm}(t)$  речь идет о нелинейных фигурах Лиссажу [24], и фазовое пространство системы определяется геометрией потенциальной ямы в окрестности точки  $r_{\text{eq}} = 0$  (рис.1). В принципе это позволяет исследовать характер нелинейной связи. Заметим, что сходный подход (метод траекторий) достаточно широко используется в нелинейной динамике [24,25], химической физике [26–28], нелинейной акустике [29] и реологии [30,31].

Зависимости  $r_{+}(t)$  (16) и  $r_{-}(t)$  (14)–(15) для тех же значений параметров ( $k_2 = 1, \sigma_1 = 1, \rho_0 = 1, \sigma_2 = 0.4, \rho_1 = -0.45, \Delta\kappa_{+} = -10, \Delta\kappa_{-} = -1$  при  $\mu_{+} = 0.3584$  и  $\mu_{-} = 0.95$ ), а также характер эволюции интенсивности  $I(t) = r_{+}^2(t) + r_{-}^2(t)$  для полученного приближенного решения иллюстрирует рис.2. На начальных участках показанных зависимостей хорошо видна медленная модуляция высокочастотных нелинейных колебаний быстро меняющейся компоненты поля  $r_{+}(t)$  (рис.2,а) и полной интенсивности  $I(t)$  (рис.2,в) низкочастотными нелинейными колебаниями медленно меняющейся компоненты  $r_{-}(t)$  (рис.2,б). Затем эволюция  $r_{+}(t)$  и  $I(t)$  явно становится более нерегулярной и изрезанность соответствующих зависимостей растет.

Постепенное (по мере роста  $t$ ) изменение характера зависимостей  $r_{+}(t)$  и  $I(t)$  (рис.2) можно объяснить следующим. Набор гармоник, присутствующих в фурье-спектре амплитуды  $r_{+}(t)$ , в результате медленной модуляции ее параметров определенным образом сфазирован путем конкретного выбора начальных условий в момент  $t = 0$ . Начальные фазовые соотношения могут быть изменены, например, за счет изменений начальных фаз функций  $\text{sn}$  и  $\text{cn}$ , которые при этом останутся решениями соответствующих уравнений. В процессе последующей эволюции (распространения) фазовые сдвиги между разными гармониками меняются вследствие частотной дисперсии, и происходит их постепенная «стохастизация» (система постепенно «забывает» начальные условия), что существенно отличает этот этап от начального этапа эволюции, на котором зависимости  $r_{+}(t)$  и  $I(t)$  являются почти регулярными. Расчет динамики компонент для разных начальных фаз функций  $\text{sn}$  и  $\text{cn}$  подтвердил, что для выбранных нами значений параметров длительность начального этапа  $\Delta t$  всегда составляет  $\sim 10$ . Сама же приведенная выше интерпретация весьма сходна с классической интерпретацией многоквантовых процессов (включая так называемые немарковские релаксационные процессы), изложенной, например, в [32].

Сказанное выше иллюстрирует рис.3, на котором показана зависимость  $\arg v_{+}(t)$  (сплошная линия) эллиптической функции  $\text{sn}$  в выражении (16а) от времени. Легко убедиться, что вследствие строго периодической модуляции  $v_{+}(t)$  (16в) зависимость  $\arg t_i$  имеет весьма сложный и аперриодический характер. Светлыми кружками показаны точки  $\{t_i, \arg t_i\}$ , в которых  $\arg t_i = 4K(\mu_{+})n$ , где  $i, n = 0, 1, 2, \dots$  – целые числа, и начальное значение эллиптической функции  $\text{sn}$  повторяется [20]. Как видно из приведенной зависимости, точки  $t = t_i$  расположены на оси времени неравномерно. Более того, в процессе эволюции (изменение  $t_i$ ) значение  $\arg t_i$  изменяется монотонно, а при достаточно больших  $n$  одно и то же значение  $\arg$  появляется в разные моменты времени. Это и означает, что в процессе эволюции изменение компоненты поля  $r_{+}(t)$  со временем в соответствии с (16) приобретает сугубо аперриодический характер, который

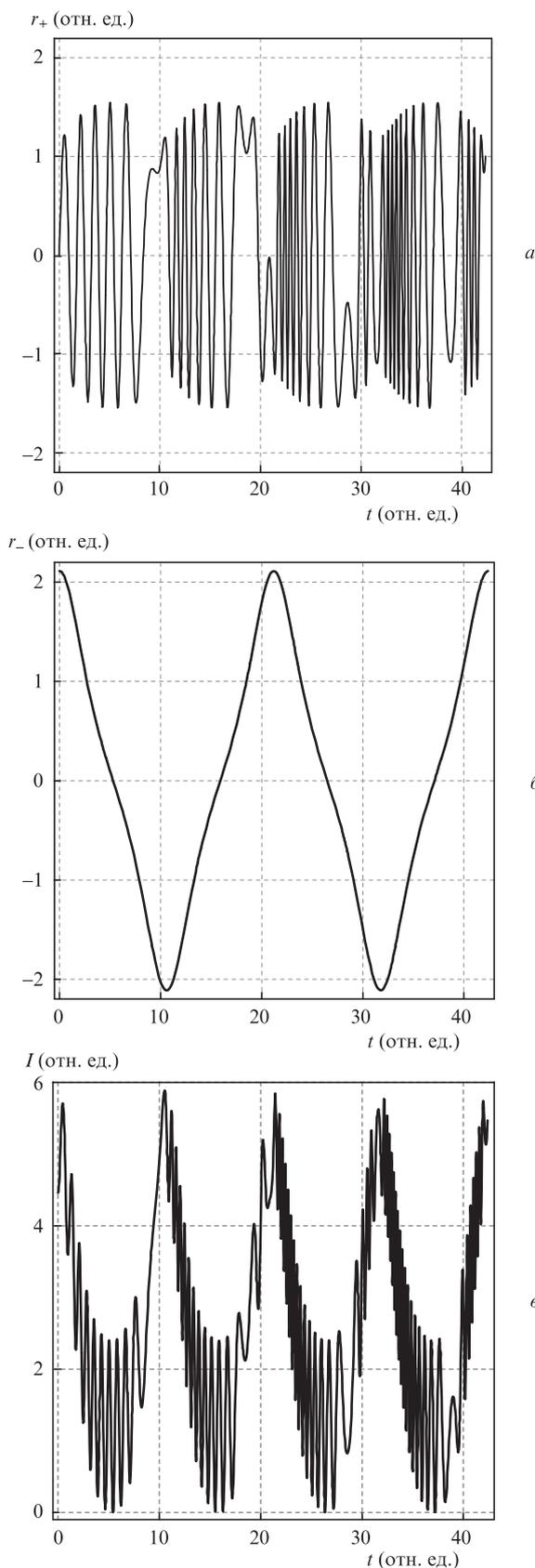


Рис.2. Зависимости  $r_{+}(t)$  (16) и  $r_{-}(t)$  (14)–(15) (а и б), а также  $I(t) = r_{+}^2(t) + r_{-}^2(t)$  (в) при  $k_2 = 1, \sigma_1 = 1, \rho_0 = 1, \sigma_2 = 0.4, \rho_1 = -0.45, \Delta\kappa_{+} = -10, \Delta\kappa_{-} = -1, \mu_{+} = 0.3584$  и  $\mu_{-} = 0.95$  для  $t \in [0, 43]$ .

полностью соответствует характеру зависимостей, показанных на рис.2.

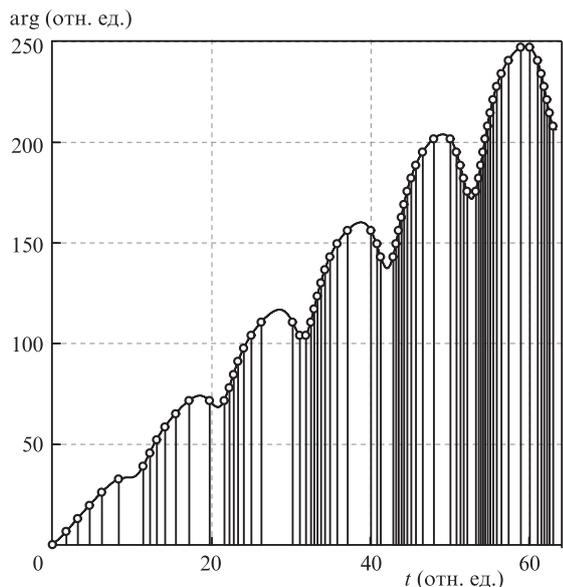


Рис.3. Зависимость  $\text{arg} = tv_+(t)$  (сплошная кривая) эллиптической функции  $\text{sn}$  в (16а) от времени при  $k_2 = 1, \sigma_1 = 1, \rho_0 = 1, \sigma_2 = 0.4, \rho_1 = -0.45, \Delta\kappa_+ = -10, \Delta\kappa_- = -1, \mu_+ = 0.3584$  и  $\mu_- = 0.95$  для  $t \in [0, 63]$ . Светлыми кружками показаны точки, в которых  $\text{arg} = 4K(\mu_+)n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – целое число.

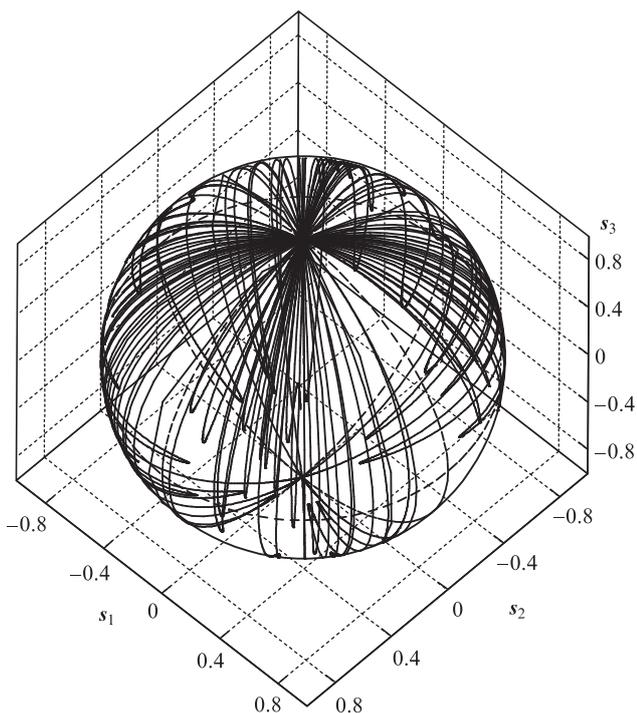


Рис.4. Траектории движения конца вектора  $s$  на сфере Пуанкаре при  $k_2 = 1, \sigma_1 = 1, \rho_0 = 1, \sigma_2 = 0.4, \rho_1 = -0.45, \Delta\kappa_+ = -10, \Delta\kappa_- = -1$  для приближенного решения (14)–(16) при  $\mu_+ = 0.3584$  и  $\mu_- = 0.95$ . Плоскость наблюдения движется с постоянной скоростью так, что  $t = 0.54z, t \in [0, 43]$ .

«Хаотический» характер эволюции состояния поляризации иллюстрирует рис.4, на котором показана траектория движения конца вектора Стокса  $s$  на сфере Пуанкаре [13] при  $k_2 = 1, \sigma_1 = 1, \rho_0 = 1, \sigma_2 = 0.4, \rho_1 = -0.45, \Delta\kappa_+ = -10, \Delta\kappa_- = -1$  для приближенного решения (14)–(16) при  $\mu_+ = 0.3584$  и  $\mu_- = 0.95$ . Для большей наглядности считается, что плоскость наблюдения движется с постоянной скоростью и  $t = 0.54z$  ( $t \in [0, 43]$ ). Хорошо виден сугубо апер-

иодический характер эволюции состояния поляризации. Причиной нерегулярного изменения, как и в [8,9,11,12], является несоизмеримость частот, а также расфазировка гармоник фурье-спектра функции  $r_+(t)$ .

### 5. Заключение

Итак, в настоящей работе в рамках адиабатического приближения получено аналитическое решение неинтегрируемой задачи распространения плоской эллиптически поляризованной световой волны с нулевыми средними амплитудами ортогональных циркулярно поляризованных компонент поля через изотропную гиротропную среду с локальной и нелокальной составляющими керровской нелинейности и дисперсией групповых скоростей второго порядка. Установлено, что в этом случае, как и в тех ситуациях, которые были ранее рассмотрены в [14], существуют связанные за счет нелинейности состояния ортогонально поляризованных компонент поля с существенно разномасштабной, но согласованной во времени эволюцией. Причиной этого является то, что вклады последних в полную энергию системы и в этой ситуации не обнуляются, поскольку они определяются моментами второго порядка (интенсивностями). Показано, что решения, полученные в этом приближении, соответствуют случаю с одновременным возбуждением двух нормальных нелинейных мод на существенно разных частотах, т.е. отвечают за режимы распространения (аперiodическую эволюцию), напоминающие поляризационный «хаос». Отметим также, что в рассмотренной здесь ситуации (для конкретного выбора значений набора параметров) точных частных периодических решений, которые являлись бы альтернативой описанного нами здесь класса приближенных решений, не существует.

Необходимо также отметить, что постепенный переход от ситуации с почти регулярной на начальном этапе динамикой быстрой компоненты поля к ее аперiodической («хаотической») эволюции на последующих этапах весьма похож на классический переход от регулярной орбитальной динамики (неоднородное уширение перехода) к необратимым релаксационным процессам за счет так называемых многоквантовых переходов, описанных, например, в [32].

В окрестности рассмотренного минимума  $r_{\text{eq}} = 0$  можно аналогично построить разномасштабные решения задачи (1) как для потенциальной ямы, вытянутой вдоль оси  $r_+$ , когда компонента  $r_+$  будет медленной, а  $r_-$  – быстрой, так и в виде других комбинаций эллиптических функций:  $\text{sn}(v_+t, \mu_+)$  и  $\text{sn}(v_-t, \mu_-)$ ,  $\text{sn}(v_+t, \mu_+)$  и  $\text{sn}(v_-t, \mu_-)$ ,  $\text{cn}(v_+t, \mu_+)$  и  $\text{cn}(v_-t, \mu_-)$ .

Работа частично финансирована грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ № НШ-3796.2014.2.

- Christiansen P.L., Eilbeck J.C., Enolskii V.Z., Kostov N.A. *Proc. Royal Soc. London A*, **456**, 2263 (2000).
- Chow K.W., Nakkeeran K., Malomed B.A. *Opt. Commun.*, **219** (1), 251 (2003).
- Tsang S.C., Nakkeeran K., Malomed B.A., Chow K.W. *Opt. Commun.*, **249** (1–3), 117 (2005).
- Chiu H.S., Chow K.W. *Intern. J. Computer Mathemat.*, **87** (5), 1083 (2010).
- Голубков А.А., Макаров В.А., Пережогин И.А. *Вестник Моск. ун-та. Сер. Физика. Астрономия.*, №1, 52 (2009).
- Makarov V.A., Perezhogin I.A., Potravkin N.N. *Laser Phys.*, **19** (2), 322 (2009).

7. Макаров В.А., Петров К.П. *Квантовая электроника*, **20** (10), 1011 (1993).
8. Макаров В.А., Пережогин И.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42** (2), 117 (2012).
9. Макаров В.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42** (12), 1118 (2012).
10. Makarov V.A., Petnikova V.M., Potravkin N.N., Shuvalov V.V. *Phys. Wave Phenom.*, **21** (4), 264 (2013).
11. Makarov V.A., Petnikova V.M., Potravkin N.N., Shuvalov V.V. *Laser Phys. Lett.*, **10** (7), 075404 (2013).
12. Макаров В.А., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **44** (2), 130 (2014).
13. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1973).
14. Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Laser Phys.*, **24** (8), 085405 (2014).
15. Давыдов А.С. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1973).
16. Мессиа А. *Квантовая механика*, т. 2 (М.: Наука, 1979).
17. Griffiths D.J. *Introduction to Quantum Mechanics* (Upper Saddle River: Prentice Hall Inc., 1995).
18. Petnikova V.M., Shuvalov V.V., Vysloukh V.A. *Phys. Rev. E*, **60** (1), 1009 (1999).
19. Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76** (4), 046611 (2007).
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
21. Браун П.А., Киселев А.А. *Введение в теорию молекулярных спектров* (Л.: изд-во ЛГУ, 1983).
22. Степанов Н.Ф. *Квантовая механика и квантовая химия* (М.: Мир, 2001).
23. Яворский Б.М., Детлаф А.А. *Справочник по физике* (М.: Наука, 1981).
24. Carinena J.F., Ranada M.F., Santander M. arXiv: math-ph/0505024 (2005).
25. Sumpter B.G., Noid D.W. *J. Chem. Phys.*, **102** (16), 6619 (1995).
26. Klein M.L. *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **36**, 525 (1985).
27. Raff L.M., Thompson D.L. In *Theory of Chemical Reaction Dynamics*. Ed. by M.Baer (Boca Raton, FL: CRC, 1985, Vol. III, pp 1–121).
28. Agrawal P.M., Thompson D.L., Raff L.M. *J. Chem. Phys.*, **89** (2), 741 (1988).
29. Гаврилов А.М., Ситников Р.О. *Изв. ВУЗов. Сев.-Кавказский регион. Технические науки*, №3, 34 (2006).
30. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009).
31. Dong L., Lakes R.S. *Smart Mater. Struct.*, **21** (7), 075026 (2012).
32. Коварский В.А., Перельман Н.Ф., Авербух И.Ш. *Многоквантовые процессы* (М.: Энергоатомиздат, 1985).