

Стимулированное излучение на примесно-зонных оптических переходах в полупроводниках

Н.А.Бекин, В.Н.Шастин

Рассмотрены условия инверсной населённости состояний и усиления в ТГц диапазоне частот на примесно-зонных переходах электронов в полупроводниках и полупроводниковых структурах. На основе проведенных оценок показано, что эффект стимулированного излучения на указанных переходах при оптическом возбуждении примесей может быть получен в полупроводнике с достаточно высоким уровнем легирования, если не допускать чрезмерного разогрева электронов. Для n-GaAs можно обеспечить превышение усиления над потерями на 50 см^{-1} при плотности мощности накачки излучением CO₂-лазера (энергия кванта 117 мэВ) около 0.2 МВт/см^2 при условии, что температура электронов не будет превышать 40 К. Дан анализ зависимости коэффициента усиления от эффективной массы носителей заряда и компенсации легирования. Кратко обсуждается использование резонансного туннелирования для получения стимулированного излучения на примесно-зонных переходах в квантово-каскадных гетероструктурах.

Ключевые слова: лазер, инверсия населённости, мелкие примеси, квантовые ямы, примесно-зонные оптические переходы.

1. Введение

Диапазон частот типичных оптических переходов, связанных с состояниями мелких примесных центров (доноров и акцепторов) в полупроводниках, лежит в интервале 1–10 ТГц, и это не может не вызывать интереса при разработке новых источников терагерцевого излучения. Развитию таких источников, имеющих широкую область применений, уделяется большое внимание.

Основные усилия при этом направлены на усовершенствование квантово-каскадных схем, работающих на электронных переходах между 2D подзонами размерного квантования [1]. В то же время работы, имеющие отношение к использованию мелких примесных центров, появились сравнительно недавно и касаются в основном кремния. К настоящему времени показана возможность эффекта стимулированного излучения на внутрицентровых переходах $2p_0 - 1s$ и $2p_{\pm} - 1s$ оптически возбуждаемых доноров пятой группы (P, Sb, As, Bi) в кремнии [2]. Изучены характеристики спонтанного ТГц излучения акцепторов бора, галлия, а также доноров фосфора в кремнии в условиях пробоя таких центров электрическим полем [3–5]. Обнаружена и исследована ТГц электролюминесценция доноров кремния и кислорода в GaN [6], причём она соответствует как внутрицентровым, так примесно-зонным оптическим переходам. Спектр фотолюминесценции доноров в GaAs:Si при межзонном возбуждении светом также соответствует внутрицентровым и примесно-зонным переходам [7].

Цель настоящей публикации – дать теоретическую оценку возможности стимулированного излучения на

примесно-зонных оптических переходах, т. е. на переходах носителей заряда из континуума (Cont.) в основное состояние (GS) донора или акцептора (рис.1). Для такой среды следует ожидать широкой полосы усиления и слабой зависимости коэффициента усиления от концентрационного уширения рабочих состояний, связанного с влиянием одних центров легирования на энергию состояний других. Отметим, что такое уширение подавляет эффект стимулированного излучения на внутрицентровых пере-

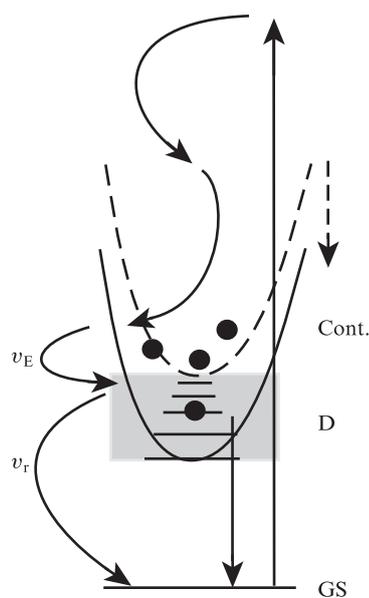


Рис.1. Схема зон в условиях повышенного уровня легирования и схема формирования инвертированного распределения на примесно-зонных оптических переходах. Серым цветом выделена область энергий D квазилокализованных состояний. Вертикальными стрелками показаны оптические переходы при накачке (вверх) и излучении на рабочих переходах (вниз), изогнутыми стрелками – релаксационные процессы при испускании оптических и акустических фононов.

Н.А.Бекин, В.Н.Шастин. Институт физики микроструктур РАН, Россия, 607680 Нижегородская обл., Кстовский р-н, д. Афонино, ул. Академическая, 7;
e-mail: nbekin@ipm.sci-nnov.ru, shastin@ipm.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 11 апреля 2014 г.

ходах доноров в кремнии уже при легировании $\sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ [8] и ограничивает коэффициент усиления на уровне $2-3 \text{ см}^{-1}$. Использование переходов Cont.–GS могло бы дать больший коэффициент усиления за счёт большей концентрации легирования. Важную роль, однако, играют параметры и специфика полупроводника. Например, как показано ниже, для объёмного n-Si вариант трёхуровневой схемы усиления на примесно-зонных переходах труднореализуем, поскольку требует в случае оптической накачки чрезмерных мощностей возбуждения. С другой стороны, для n-GaAs при легировании до $\sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ можно рассчитывать на коэффициент усиления $\sim 100 \text{ см}^{-1}$, что делает реализуемым лазер на примесно-зонных переходах, в том числе в размерно-квантованных гетероструктурах, как при оптической [9], так и, возможно, при токовой [10, 11] накачке.

Впервые идея генерации излучения на переходах Cont.–GS была высказана в 1959 г. [12]. Предполагалось, что необходимое для усиления электромагнитных волн превышение населённости состояний континуума над населённостью состояний кулоновских центров (инверсная населённость) можно получить при их пробое импульсом электрического поля. Однако развития эта идея не получила, что вполне объяснимо, если принять во внимание сопутствующие проблемы. В первую очередь речь идёт о проблеме возбуждения инверсной населённости рабочих состояний. Пробой примесных центров сопровождается значительным разогревом носителей заряда, который препятствует формированию требуемого распределения. Однако, не имея шансов в условиях пробоя, токовая накачка инвертированных распределений возможна. К примеру, она реализуема при вертикальном транспорте по квантовому 2D каскаду в гетероструктурах благодаря эффекту резонансного туннелирования с участием фононов [10]. К тому же проблема инверсной населённости состояний на примесно-зонных переходах может быть решена посредством оптической ионизации примесных центров. Выбором энергии кванта накачки легко минимизировать разогрев носителей заряда, и такой подход эффективен как для объёмных полупроводников, так и для полупроводниковых структур. Однако имеется и другое серьёзное препятствие – поглощение на электронах континуума. При этом надо учитывать, что значительная часть таких электронов в той или иной степени локализована на кулоновском потенциале кулоновских центров или их комплексов, и теоретический анализ такого поглощения затруднителен.

В разд.2 обсуждаются условия инверсной населённости и усиления на переходах Cont.–GS при оптическом возбуждении, а в разд.3 дается оценка соотношения сечений усиления и поглощения и сформулированы условия для возникновения эффекта стимулированного излучения. В разд.4 обсуждаются полученные результаты, и затрагивается проблема замены оптической накачки токовой в квантово-каскадных гетероструктурах. В Заключение сформулированы основные выводы работы.

2. Населённость и усиление на рабочих переходах

Для простоты ограничимся донорами в условиях их оптического возбуждения и сделаем оценки, используя ряд допущений и упрощающих представлений и сопоставляя случаи трёхмерной и двумерной систем. Интерес

представляет легирование на уровне $10^{16}-10^{17} \text{ см}^{-3}$ для n-GaAs и $10^{17}-10^{18} \text{ см}^{-3}$ для n-Si. При указанных концентрациях легирования возбуждённые $2p_0$ -, $2s$ -, $2p_{\pm}$ - и т.д. состояния донора образуют зону квазилокализованных состояний D, которая «переходит» в континуум свободных носителей заряда Cont. (рис.1). При этом основное состояние $1s$, будучи неоднородно уширенным, остается локализованным (ср. с [13]). Соответствующий анализ плотности состояний доноров фосфора в кремнии приведен в работе [13]. Ограничимся рассмотрением трёхуровневой схемы, в которой основное состояние центра (GS), являясь нижним состоянием рабочего перехода, опустошается оптической накачкой. При этом электроны переходят в состояния Cont.. Далее следует быстрый (темп $\sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$) процесс излучения оптических фононов. При благоприятном соотношении энергий кванта накачки и оптического фонона (рис.1) основная часть возбуждаемых носителей заряда оказывается на дне зоны D в узкой полосе энергий, а их функция распределения определяется отношением темпа их рекомбинации v_r (захват в основное состояние) к темпу релаксации энергии v_E (термализация) с излучением акустических фононов [14]. Будем полагать, и это является самым серьезным допущением, что процесс оже-рекомбинации [14] через столкновения в зоне D подавлен благодаря локализации носителей, присущей этой области. Таким образом, можно ожидать, что темп рекомбинации близок к темпу термализации на акустических фононах ($v_r \leq v_E$) и слабо зависит от концентрации заряженных кулоновских центров (ср. с [15]). Можно также предположить, что электроны континуума (включая область D) подчиняются статистике Больцмана, и эффективную температуру электронов T_e можно оценить из уравнения баланса. Тогда функция распределения электронов по состояниям 3D континуума имеет следующий вид:

$$f_{3D}(E) = \frac{n_{3D}}{\eta N_c} \exp\left(-\frac{E}{k_B T_e}\right), \quad (1)$$

где n_{3D} – концентрация электронов континуума; $N_c = 2 \times [mk_B T_e / (2\pi\hbar^2)]^{3/2}$ – эффективная плотность состояний; m – эффективная масса плотности состояний; η – количество эквивалентных минимумов в зоне Бриллюэна; E – энергия, которая отсчитывается от дна зоны D. Для простоты полагаем, что зависимость плотности состояний от энергии вблизи минимума такая же, как для параболической зоны. Концентрация электронов в континууме

$$n_{3D} = \frac{N_{3D}^0 v_1^{(3D)}}{v_r^{(3D)}} = \frac{N_{3D}^0 \sigma_1^{(3D)} F}{v_r^{(3D)}},$$

где $v_1^{(3D)}$ и $\sigma_1^{(3D)}$ – темп и сечение фотоионизации соответственно; N_{3D}^0 – концентрация нейтральных примесных центров; F (квант·см⁻²·с⁻¹) – плотность потока квантов накачки. Величины N , n , σ , v зависят от размерности системы, однако далее мы будем опускать индексы 3D или 2D в случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

Аналогично, учитывая изменения сечения фотоионизации, темпа рекомбинации и других параметров, обусловленные понижением размерности, можно рассмотреть 2D систему. Функция распределения электронов по состояниям 2D континуума

$$f_{2D}(E) = \frac{\pi \hbar^2 n_{2D}}{\eta m k_B T_e} \exp\left(-\frac{E}{k_B T_e}\right), \quad (2)$$

где $n_{2D} = N_{2D}\sigma_1^{(2D)}F/v_r^{(2D)}$ – двумерная концентрация электронов в континууме при двумерной концентрации легирования N_{2D} .

При этом населённость основного состояния

$$f_{GS} = \frac{N^0}{N} = \frac{1-K}{1+v_1/v_r}, \quad (3)$$

где N – соответствующая размерности системы полная концентрация основных центров легирования; K – параметр компенсации. Заметим, что $N = N^0 + N^+$, где $N^+ = KN + n$ – концентрация заряженных центров. Отсюда вытекает условие инверсной населённости и усиления для чисел заполнения континуума:

$$f = \frac{v_1(1-K)}{(v_1+v_r)d} > \frac{1-K}{1+K+2v_1/v_r}, \quad (4)$$

где величина d для состояний дна зоны в 3D случае и дна подзоны в 2D случае такова:

$$d_{3D} = \frac{2\eta}{N_{3D}} \left(\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2},$$

$$d_{2D} = \frac{\eta mk_B T_c}{\pi\hbar^2 N_{2D}}.$$

Поскольку предполагается справедливость статистики Больцмана, то $d > 1$. Из (4) для порогового темпа возбуждения, $v_1 = v_{th}$, имеем

$$\frac{v_{th}}{v_r} = \frac{1}{4} \left[d - 1 - K + \sqrt{(d-1-K)^2 + 8d} \right]. \quad (5)$$

Нетрудно получить и коэффициент усиления/поглощения на рабочем переходе:

$$\alpha(\omega) = \sigma_1(\omega)[2N^+f - N^0(1-f)], \quad (6)$$

где $\sigma_1(\omega)$ – частотно зависимое сечение фотоионизации центра. Дополнительный фактор 2 в формуле (6) в слабом, соответствующем излучению, возникает из-за двукратного вырождения по спину уровня основного состояния ионизованного центра. Максимальное значение сечения σ_1 практически не зависит от концентрации доноров [16]. В Si:P оно близко к 10^{-15} см² на частоте $\nu = \omega/(2\pi) \approx 10$ ТГц (40 мэВ) [16], а в n-GaAs, по расчётам, равно 6×10^{-14} см² при $\nu \approx 1.5$ ТГц (6 мэВ). Выражение для сечения фотоионизации приведено ниже.

Для 2D случая в формуле (6) следует использовать объёмные концентрации $N^0 = N_{2D}^0/L$ и $N^+ = N_{2D}^+/L$, где L – ширина квантовой ямы, или период сверхрешётки.

Сечение фотоионизации σ_1 в выражении (6) зависит от размерности системы. Сначала рассмотрим случай 3D системы. Если использовать приближение водородоподобных волновых функций 3D континуума, то σ_1 имеет следующий вид [17]:

$$\sigma_1^{(3D)}(\omega) = \frac{2^9 \alpha \pi^2 a^2}{3\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{E_i}{\hbar\omega} \right)^4 \frac{\exp[-4 \arctan(\theta)/\theta]}{1 - \exp(-2\pi/\theta)}, \quad (7)$$

где $\alpha = q^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры; q – заряд электрона; c – скорость света; $\theta = \sqrt{\hbar\omega/E_i} - 1$; $E_i = mq^4 \times (2e^2\hbar^2)^{-1}$ – энергия связи; ε – диэлектрическая проницаемость; $a = \varepsilon\hbar^2/(mq^2)$ – радиус Бора. Анизотропией эф-

фективной массы m мы пренебрегаем. При таком подходе сечение фотоионизации имеет максимум на красной границе фотоэффекта.

Используя матричные элементы для оптических переходов между основным состоянием и состояниями континуума двумерного атома водорода [18], можно получить сечение фотоионизации в 2D случае:

$$\sigma_1^{(2D)}(\omega) = \frac{8\alpha\pi^2 a^2}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{E_i}{\hbar\omega} \right)^3 \frac{\exp[-2 \arctan(\theta)/\theta]}{1 + \exp(-\pi/\theta)}, \quad (8)$$

где все обозначения те же, что и в формуле (7). Радиус Бора a остаётся прежним, а энергия связи E_i увеличивается в четыре раза: $E_i = 2mq^4/(\varepsilon^2\hbar^2)$.

Из выражений (4) и (5) следует, что пороговый темп возбуждения уменьшается с ростом K , однако этот эффект выражен довольно слабо. Например, при $T_c = 40$ К в арсениде галлия отношение v_{th}/v_r уменьшается с 1.35 при $K = 0$ до 1.2 при $K = 0.5$. Заметим, что зависимость v_r от компенсации также слаба [15].

Для осуществления лазерной генерации пороговое условие (5) является слишком мягким, поскольку необходимо преодолеть электродинамические потери, связанные, в частности, с потерями Друде (см. разд.3). В связи с этим влияние компенсации может оказаться отрицательным. Во-первых, поглощение Друде увеличивается с компенсацией из-за роста рассеивающих ионизованных центров. Во-вторых, использование большого темпа возбуждения, начиная с некоторого порога (большого, чем (5)), приводит к убывающей зависимости коэффициента усиления (6) от K . Это связано с негативным влиянием компенсации на функцию распределения электронов в континууме ($f \propto v_1(1-K)$, см. (4)). Учитывая эти обстоятельства, далее мы будем рассматривать некомпенсированные полупроводники.

Воспользуемся для оценок пороговой мощности фотовозбуждения сечением фотоионизации σ_1 (7). Если в качестве источника накачки используется CO₂-лазер, то в n-GaAs сечение $\sigma_1 = 8 \times 10^{-18}$ см² ($\hbar\Omega = 117$ мэВ). Заметим, что оценка сечения фотоионизации по столкновительному механизму с использованием классической формулы Друде (частота столкновений $\sim 10^{12}$ с⁻¹) даёт $\sigma_1 \sim 10^{-17}$ см². Это означает, что приведённые ниже пороговые мощности фотовозбуждения для n-GaAs в действительности меньше примерно в два раза.

Оценим темп рекомбинации в основное состояние v_r , используя следующую модель. Наиболее вероятен переход в основное состояние с дна зоны D; дно зоны соответствует энергии нижнего возбуждённого состояния в приближении изолированного кулоновского центра. Используя это приближение, возьмём в качестве v_r вероятность перехода электрона из состояния $2p_0$ в основное состояние при испускании акустического фонона. Считая температуру кристалла низкой, ограничимся спонтанными процессами. Тогда, учитывая большую разность энергий ΔE при переходе ($\Delta E/\hbar s \gg a^{-1}$, s – скорость звука), имеем [14]

$$v_r = \frac{2^{19} E_D^2 m^3 s^3 \varepsilon^2}{3^5 \pi \hbar^2 q^4 \rho_{cr}}, \quad (9)$$

где E_D – деформационный потенциал; ρ_{cr} – плотность кристалла.

Для мелких доноров в GaAs скорость $v_r = 2 \times 10^6$ с⁻¹. Для сравнения, в модели [15] темп захвата v_c на возбуж-

дённые состояния (зона D) составляет $3 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$ ($N_{3D} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$). При этом v_c не зависит от температуры решётки и электронов. В случае, если оже-процессы играют существенную роль при безызлучательной рекомбинации на основное состояние, темп рекомбинации может быть сопоставимым с темпом захвата: $v_r \leq v_c$. При оценке сверху, $v_r \approx v_c \approx 3 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$, пороговая плотность мощности ($v_{th}/v_r \approx 1.3$, $T_e = 40 \text{ К}$) составляет 0.1 МВт/см^2 . Однако, как отмечалось, в условиях частичной локализации электронов в зоне D оже-процессы подавлены, поэтому темп рекомбинации должен быть меньше, что приведёт к снижению пороговой плотности мощности. Пороговая плотность мощности снижается также в случае уменьшения энергии кванта излучения накачки $\hbar\Omega$: при $\hbar\Omega = 50 \text{ мэВ}$ ($\sigma_1 \approx 10^{-16} \text{ см}^2$) и $v_r \approx 3 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$ она составляет 3 кВт/см^2 .

Для n-Si в приближении эффективной массы ($m = 0.32m_0$, m_0 – масса свободного электрона) $\sigma_1 \approx 5 \times 10^{-17} \text{ см}^2$ ($\hbar\Omega = 117 \text{ мэВ}$). Темп захвата на возбуждённые состояния в модели [15] довольно высок: $v_c = 5 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ при $N_{3D} = 3 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Учитывая, что энергия связи доноров в кремнии ($\sim 40 \text{ мэВ}$) существенно больше, чем в n-GaAs, можно ожидать, что темп рекомбинации в основное состояние в несколько раз меньше, чем указанный темп захвата на возбуждённые состояния. Тогда, полагая $v_r \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$, получим, что пороговая плотность мощности равна 10 МВт/см^2 ($v_{th}/v_r \approx 2.6$, $T_e = 40 \text{ К}$). Кроме высокого темпа рекомбинации в n-Si, негативную роль играет шестикратное вырождение долин ($\eta = 6$), приводящее к соответствующему снижению чисел заполнения (1). Уменьшив энергию кванта излучения накачки до 50 мэВ ($\sigma_1 \approx 6 \times 10^{-16} \text{ см}^2$), пороговую плотность мощности можно снизить до 0.4 МВт/см^2 . Снижение температуры электронов до 20 К уменьшит отношение v_{th}/v_r почти втрое. С учётом того, что v_r слабо зависит от температуры, уменьшение температуры электронов, очевидно, позволяет снизить пороговую мощность накачки.

Аналогичным образом рассмотрим рекомбинацию электронов в основное состояние примесей в квантовых ямах. Для этого оценим в одноцентровом приближении вероятность перехода электрона из состояния $2p_0$, считая соответствующий уровень нижней границей зоны D, в основное состояние $1s$. В квазидвумерном приближении, когда разность энергий нижних подзон значительно превышает энергию связи примеси, волновые функции примесных состояний можно записать в виде произведения функций от ρ и z : $\psi_{1s} \approx \beta_1 \exp(-\beta_1 \rho/2) \psi_1(z)/\sqrt{2\pi}$, $\psi_{2p_0} \approx \beta_2(1 - \beta_2 \rho) \exp(-\beta_2 \rho/2) \psi_1(z)/\sqrt{6\pi}$, где $\psi_1(z)$ – волновая функция нижней подзоны. Мы использовали для латеральных степеней свободы вид волновой функции двумерного атома водорода [18]. Чтобы учесть вариацию энергии и масштаба локализации примесных состояний в квантовых ямах конечной ширины, введём в коэффициенты β_i дополнительный фактор γ , не зависящий от номера уровня: $\beta_i = 2\gamma/[(i-1/2)a]$ (энергии уровней $E_i = -q^2\gamma \times [2(i-1/2)^2\epsilon a]^{-1}$). В двумерном случае $\gamma = 1$. Использование масштабирующего фактора γ формально эквивалентно вариации массы в задаче о двумерном атоме водорода. Приравняв вероятность спонтанного испускания акустического фона при переходе $2p_0-1s$ темпу рекомбинации, получим

$$v_r = \frac{16E_D^2 q^{10} m^3 \gamma^3}{9\pi \hbar^9 \epsilon^5 s^4 \rho_{cr}} J(\gamma, \chi), \quad (10)$$

где

$$J(\gamma, \chi) = \int_0^{\chi} \frac{F(8\gamma x/3a)^2 (\chi^2 - x^2)^2 dx}{(1 + \chi^2 - x^2)^5};$$

$$F(q_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_1(z)|^2 \exp(-iq_z z) dz; \quad \chi = \frac{2q^2}{3\epsilon \hbar s}.$$

Для GaAs коэффициент $\chi \approx 20.4 \gg 1$, поэтому в двумерном случае ($|F(q_z)| = 1$) хорошее приближение даёт асимптотическое разложение: $J(\gamma = 1, \chi) \approx \chi^{-1/24}$. Темп рекомбинации сильно снижается с ростом толщины квантовой ямы, что обусловлено двумя факторами, действующими в одном направлении, – зависимостью от толщины $J(\gamma, \chi)$ и множителем γ^3 в формуле (10) (с ростом толщины квантовой ямы энергия связи примеси и, следовательно, γ уменьшаются).

Для примера рассмотрим слой GaAs в приближении бесконечно глубокой квантовой ямы. В 2D случае (при нулевой толщине) $v_r \approx 8 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$, а при толщине ямы 7 нм темп рекомбинации уменьшается до $\sim 3 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$. В последнем случае для оценок использовалось значение $\gamma \approx 0.43$ ($\gamma = |E_1|/|E_i^{(2D)}| = |E_1| \epsilon^2 \hbar^2 / (2mq^4)$, $|E_1| \approx 10 \text{ мэВ}$), что приблизительно соответствует характеристикам доноров в квантовых ямах $\text{In}_{0.17}\text{Ga}_{0.83}\text{As}$ той же толщины в экспериментах по фотовозбуждению гетероструктур GaAs/InGaAs [9]. Экспериментально измеренный темп рекомбинации $\sim 10^8 \text{ с}^{-1}$, больший, чем даёт вышеприведенная оценка предположительно обусловлен релаксацией на оптических фонах горячих электронов из хвоста функции распределения [9].

В 2D случае для n-GaAs имеем $v_{th}/v_r \approx 1.2$ при $N_{2D} = 5 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$ и $T_e = 40 \text{ К}$; при температуре 20 К отношение $v_{th}/v_r \approx 0.7$. В n-Si для концентрации доноров $N_{2D} = 5 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$ отношение $v_{th}/v_r \approx 3.1$ при $T_e = 40 \text{ К}$, при температуре 20 К – примерно 1.7 .

Обобщив вышеизложенное, можно сказать, что при переходе от объемного случая к квазидвумерному на усиление влияют несколько факторов. Во-первых, отрицательную роль играет увеличение темпа рекомбинации в основное состояние, что объясняется локализацией волновой функции в слое и её соответствующей делокализацией в импульсном пространстве [14]. Вторым фактором, обусловленным локализацией примеси в квантовом слое, является увеличение её энергии связи. С одной стороны, это приводит к уменьшению сечения усиления на примесно-зонных переходах, но с другой – к уменьшению потерь из-за поглощения на свободных носителях заряда. Ещё одним следствием локализации является увеличение сечения поглощения на частоте накачки, что следует из сравнения формул (7) и (8). Итоговый баланс позитивных и негативных факторов должен учитывать внутренние потери. С учётом потерь квантование в слое, как показано ниже, улучшает соотношение между усилением и поглощением.

3. Внутренние потери и усиление

Сопоставим значение коэффициента усиления на рабочем переходе с внутренними потерями. В рассматриваемых условиях это поглощение на электронах континуума. Для оценки сечения такого поглощения будем использовать классическое выражение Друде–Лоренца [19]:

$$\sigma_D = \frac{4\pi q^2 v}{mc \sqrt{\varepsilon} (\omega^2 + v^2)}, \quad (11)$$

где v – частота столкновений. Очевидно, что в условиях сильного легирования доминирует рассеяние на заряженных центрах, и в модели Конуэлла – Вайскопфа [20]

$$v = \frac{\pi q^4 N_I}{\sqrt{2m \varepsilon^2 E^{3/2}} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2 E^2}{q^4 N_I^{2/3}} \right)}, \quad (12)$$

где $E = k_B T_e$ – энергия электронов; $N_I = N^+$ ($K = 0$) – число ионизованных центров. Заметим, что близкое значение получается и при использовании формулы Брукса – Херринга [21].

С учётом приведённых выражений можно сравнить коэффициент усиления α на красной границе фотоэффекта $\omega_{\text{red}} = E_i/\hbar$ с коэффициентом поглощения $\beta = \sigma_D n_{3D}$. Аналитические оценки получим в предельном случае $v_1 \gg v_r$, который соответствует полной ионизации примесей: $N^+ \approx n$. Это позволит ответить на вопрос, возможно ли в принципе превышение усиления над потерями. Для объёмного случая имеем

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{G_0}{\eta G} \left(1 + \frac{v^2}{\omega_{\text{red}}^2} \right), \quad (13)$$

где $G_0 = 2^7 \pi^{3/2} / 3e^4 \approx 4.35$; e – основание натурального логарифма; G – логарифм, входящий в формулу (12). Как следует из (13), отношение усиления к поглощению уменьшается с повышением температуры по логарифмическому закону. Заметим также, что отношение (13) в рассматриваемом предельном случае связано с эффективной массой только через частотный фактор v/ω_{red} .

Для примера рассмотрим GaAs с мелкими донорами в пределе высокой интенсивности возбуждения: $v_1 \gg v_r$. При концентрации $n_{3D} \approx N^+ \approx N = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ температура T_e , при которой усиление двукратно превышает поглощение, составляет 80 К. При этой температуре на красной границе фотоэффекта ($\hbar\omega_{\text{red}} \approx 5.8 \text{ мэВ}$) сечение усиления $\sigma = \alpha/N \approx 2 \times 10^{-14} \text{ см}^2$ ($\alpha \approx 200 \text{ см}^{-1}$, $\sigma_1(\omega_{\text{red}}) \approx 6.2 \times 10^{-14} \text{ см}^2$, $f_{3D} = 0.17$), тогда как сечение поглощения $\sigma_D \approx 10^{-14} \text{ см}^2$ ($v \approx 1.8 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$).

В реалистичной ситуации $v_1/v_r = 2$ (мощность накачки излучением CO₂-лазера около 0.2 МВт/см²) и при условии, что $T_e = 40 \text{ К}$, коэффициент усиления α составляет $\sim 120 \text{ см}^{-1}$ ($\sigma \approx 1.2 \times 10^{-14} \text{ см}^2$), а поглощение Друде β равно $\sim 70 \text{ см}^{-1}$ ($\sigma_D \approx 0.7 \times 10^{-14} \text{ см}^2$). Для сравнения на рис.2 показано сечение усиления в случае полной ионизации ($v_1 \gg v_r$) при той же температуре электронов. Сечение поглощения Друде на рис.2 оценивалось с использованием классического и квантового подходов [21].

Рассмотрим, как изменится соотношение между усилением и поглощением при переходе к 2D системе. Классическая формула (11) для сечения поглощения Друде справедлива и в двумерном случае, но с поправками на частоту рассеяния v . Для расчёта этой частоты воспользуемся моделью Конуэлла – Вайскопфа [22]. Введём минимальный угол рассеяния, определяемый максимальным прицельным расстоянием b_{max} . Расстояние b_{max} в свою очередь равно половине среднего расстояния между ионами, определяемого их концентрацией. При этом предполагается, что рассеяние происходит в поле одного иона. В двумерном случае

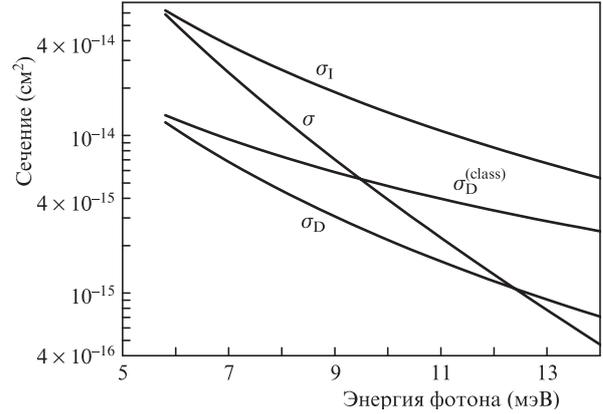


Рис.2. Зависимости от энергии фотона сечения фотоионизации σ_1 мелких доноров в GaAs, сечения усиления σ на примесно-зонных переходах при $v_1 \gg v_r$, а также сечения поглощения Друде при классическом ($\sigma_D^{(\text{class})}$) и квантовом (σ_D) подходах. Температура электронов 40 К, концентрация легирования 10^{16} см^{-3} , частота рассеяния в классической модели Друде $2.5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$.

$$b_{\text{max}} = \frac{1}{2\sqrt{N_I^{(2D)}}},$$

где $N_I^{(2D)}$ – число ионов на единицу площади. Используя подход [22] к задаче рассеяния на двумерном кулоновском потенциале [23], легко получить полное транспортное сечение рассеяния

$$\sigma_{\text{sc}}^{(2D)} = \frac{2q^2}{\varepsilon E} \arctan \left(\frac{\varepsilon E}{q^2 \sqrt{N_I^{(2D)}}} \right), \quad (14)$$

где E – энергия налетающего электрона. Соответственно частота рассеяния

$$v = N_I^{(2D)} v \sigma_{\text{sc}}^{(2D)}, \quad (15)$$

где v – средняя скорость электрона. Для оценок полагаем, что $E = k_B T_e$, а $v = \sqrt{2E/m}$. На частоте красной границы фотоэффекта отношение коэффициентов усиления α и поглощения Друде β в предельном случае таково:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2^{5/2} \pi^2 q^2 m^{1/2}}{e^2 \varepsilon \hbar \eta (k_B T_e)^{1/2} \arctan[\varepsilon k_B T_e / (q^2 n_{2D}^{1/2})]} \left(1 + \frac{v^2}{\omega_{\text{red}}^2} \right). \quad (16)$$

Заметим, что в (16), в отличие от (13), появилась дополнительная зависимость от эффективной массы, а зависимость от температуры и диэлектрической проницаемости стала более сильной.

Рассмотрим в качестве примера 2D слой GaAs, легированный мелкими донорами, при $T_e = 80 \text{ К}$ и $n_{2D} \approx N_I^{(2D)} = 5 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$. Тогда на красной границе фотоэффекта ($\hbar\omega_{\text{red}} \approx 23.2 \text{ мэВ}$) сечение усиления $\sigma \approx 1.1 \times 10^{-14}$ ($\sigma_1(\omega_{\text{red}}) \approx 2.2 \times 10^{-14} \text{ см}^2$, $f_{2D} \approx 0.26$), сечение поглощения $\sigma_D \approx 1.4 \times 10^{-15} \text{ см}^2$ ($v \approx 3.8 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$). Можно видеть, что по сравнению с объёмным GaAs сечение усиления уменьшилось, но его отношение к сечению поглощения заметно увеличилось.

4. Обсуждение

Обсудим полученные результаты, сравнивая объёмный и двумерный случаи. Прежде всего отметим сделан-

ный вывод: в обоих случаях превышение усиления над поглощением достижимо при не слишком высоких температурах электронного газа. Поскольку температура электронов является ключевым параметром, минимизация разогрева представляет собой важную задачу, которую необходимо решать при выборе полупроводника, длины волны излучения накачки и др.

Сравним обе размерности, рассматривая каждый из факторов, влияющих на усиление и поглощение. При переходе к двумерному случаю частота, соответствующая красной границе фотоэффекта, увеличивается в четыре раза, а сечение фотоионизации на этой частоте уменьшается в $2^6/3e^2 \approx 3$ раза. При этом сечение поглощения Друде (11) уменьшается за счёт фактора в знаменателе ($\omega^2 + v^2 \approx \omega^2$) приблизительно в 16 раз. Эти два фактора наиболее сильно влияют на усиление и поглощение при изменении размерности системы. На поглощение Друде влияет также изменение частоты рассеяния. Однако сравнение частот столкновений для обеих размерностей электронного газа затруднено зависимостью частоты от концентрации примесей, которая в 2D и 3D случаях имеет разные размерности. По этой же причине трудно анализировать прочие факторы, зависящие от концентрации.

Поглощение Друде вносит, очевидно, доминирующий вклад в потери. В то же время использованная нами классическая формула (11) даёт, как мы считаем, завышенную величину сечения. Из рис.2 видно, что квантовая формула [21] даёт меньшее сечение, чем (11), при том, что при её выводе пренебрегалось экранировкой кулоновского потенциала примесей. Значительное число возбуждённых электронов должно находиться в зоне квазилокализованных состояний D, что эквивалентно нейтрализации или сильной экранировке ионов примесей. В расчётах предполагалось, что эти электроны находятся в континууме и вносят вклад в поглощение Друде, обладая полноценной подвижностью. Такой подход завышает число ионизованных примесей – центров рассеяния. С другой стороны, отметим, что рабочие оптические переходы D–GS (см. рис.1) лежат в более длинноволновом диапазоне, чем переходы зона–примесь (Cont–GS) в использованном одноцентровом приближении. Это должно привести к увеличению как поглощения Друде, так и сечений рабочих переходов. Учёт этих обстоятельств требует использования более сложных моделей, выходящих за рамки одноцентрового приближения.

Условия усиления (13) и (16) являются скорее отправной точкой анализа возможности усиления в реальной ситуации, поскольку они получены в идеализированном предельном случае $v_l \gg v_r$. При предельном переходе $v_l/v_r \rightarrow \infty$ исчезает зависимость условий усиления от темпа рекомбинации v_r , который сам зависит от параметров материала и условий накачки. В рассматриваемой модели темп рекомбинации как в объёмном полупроводнике, так и в квантовых ямах пропорционален m^3 (см. (9) и (10)). Для сравнения, темп захвата на возбуждённые состояния примесей в объёмных полупроводниках пропорционален $m^{5/2}$ [15]. Существенное влияние на процессы релаксации и рекомбинации оказывает также электрон-фононное рассеяние с процессами переброса (umklapp processes), которое возможно для многодолинных волновых функций примесных состояний, как, например, в n-Si, где процессы переброса существенно ускоряют рекомбинацию.

Ещё одним важным параметром, влияющим на соотношение между усилением и потерями, является кратность

вырождения экстремумов зоны η . Как мы видели, в случае n-Si необходимые для формирования инвертированного распределения на переходах Cont.–GS мощности возбуждения чрезмерно велики, что обусловлено как высоким темпом рекомбинации, так и вырождением минимумов зоны проводимости ($\eta = 6$). Кратность вырождения можно уменьшить до $\eta = 2$ при одноосной деформации объёмного кремния, например, вдоль направления [100] или в деформированных слоях кремния, выращенных на виртуальных подложках GeSi на плоскости (100). Снижение кратности вырождения повлияет на функцию распределения также и через замедление релаксации электронов из-за уменьшения плотности состояний и выключения из процессов рассеяния междолинных f-фононов. В грубом приближении можно считать, что мощность накачки, необходимую для формирования инвертированного распределения, можно уменьшить при деформационном расщеплении долин примерно в три раза. Заметим также, что для n-Si может оказаться возможной четырёхуровневая схема возбуждения, когда нижним рабочим состоянием является один из возбуждённых уровней, возникающих из-за расщепления короткодействующим потенциалом примеси уровня 1s.

Интересно обсудить влияние химического сдвига на соотношение между усилением и поглощением. Для оценок используем работу [24], в которой методом квантового дефекта исследовалось влияние химического сдвига на сечение фотоионизации. В качестве волновых функций континуума использовались невозмущённые кулоновским потенциалом блоховские волны. Мы смоделировали влияние химического сдвига на гипотетическом примере, взяв за основу параметры n-GaAs. При увеличении энергии связи донора в 1.5 раза сечение фотоионизации уменьшилось в своём максимуме примерно в 2.5 раза. Если считать, что поглощение Друде пропорционально ω^{-2} , то при этом сдвиге энергии оно уменьшится в $1.5^2 = 2.25$ раза. Таким образом, в грубом приближении химический сдвиг не улучшает отношение σ_l/σ_D . Следует, однако, иметь в виду, что на усиление оказывает значительное влияние темп рекомбинации v_r , который в случае заглубления основного состояния должен уменьшаться, что должно благотворно сказаться на усилении.

Отметим экспериментальную работу [7], в которой спектрально идентифицированы примесно-зонные переходы при межзонном оптическом возбуждении n-GaAs с концентрацией примесей $N_D - N_A = 5 \times 10^{15}$ и $8 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Указанные концентрации соответственно меньше и больше критической концентрации для перехода Мотта ($1.6 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$) [25]. Обращает на себя внимание тот факт, что значительная часть мощности обнаруженной терагерцевой люминесценции высвечивается в спектральной области, соответствующей примесно-зонным, а не внутризонным переходам. На рис.1 обнаруженному спектральному диапазону соответствуют переходы Cont.–GS, формально эквивалентные переходам из континуума «изолированных» кулоновских центров. Вопрос о том, из каких состояний (D или Cont.) должны происходить примесно-зонные переходы, зависит от конкретных условий и требует отдельного рассмотрения.

Особый интерес представляют эксперименты по внутризонному оптическому возбуждению примесей с использованием обсуждаемой схемы. Такого рода эксперименты проводились с многопериодными селективно-легированными гетероструктурами GaAs/InGaAs n-типа с кванто-

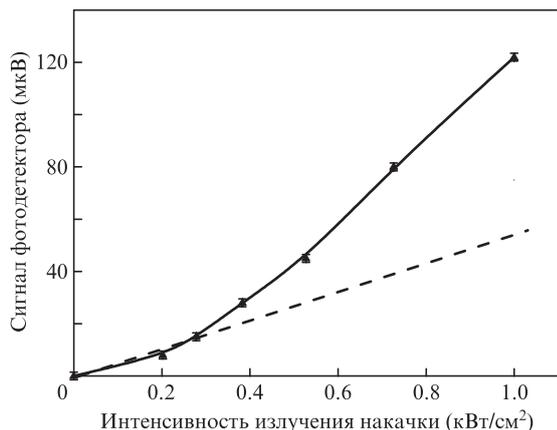


Рис.3. Зависимость мощности спонтанного излучения от интенсивности накачки излучением CO₂-лазера для структуры GaAs/In_{0.17}Ga_{0.83}As с δ-легированными квантовыми ямами при приёме излучения с торца структуры (сплошная кривая), штриховая кривая – экстраполяция линейной зависимости [9].

выми ямами [9]. Толщина ям была равна 7 нм, содержание индия в квантовых ямах составляло 17%, эффективная масса $m \approx 0.06m_0$. Легирование проводилось в квантовой яме или/и в барьерах. Некоторые гетероструктуры содержали в барьерных областях периода дополнительную мелкую квантовую яму In_{0.05}Ga_{0.95}As толщиной 14 нм. Энергия связи доноров при легировании в центре глубокой ямы по расчётам составляет ~10 мэВ. Возбуждение осуществлялось излучением CO₂-лазера ($\hbar\Omega = 117$ мэВ) с торца гетероструктур. Зависимость интенсивности терагерцевой люминесценции с торца гетероструктур от мощности накачки имела в некоторых гетероструктурах суперлинейный характер, что свидетельствовало об усилении излучения. На рис.3 показана эта зависимость для гетероструктуры с δ-легированной глубокой квантовой ямой In_{0.17}Ga_{0.83}As. Спектральный диапазон люминесценции гетероструктур, грубо определённый с помощью фильтров, отвечает энергии фотонов 12–14 мэВ, что соответствует примесно-зонным переходам.

Накопление фотовозбуждённых электронов после их релаксации при испускании оптических фононов должно происходить близко к дну первой подзоны и на возбуждённых состояниях доноров. Это следует из сопоставления трёх ключевых энергий: энергии оптического фонона (36 мэВ), энергии кванта излучения накачки (117 мэВ) и энергии связи доноров (10 мэВ). Из соотношения этих величин следует, что быстрая фаза релаксации фотовозбуждённых электронов должна заканчиваться при трёхкратном испускании оптических фононов с конечной энергией электронов вблизи минимума нижней подзоны. Таким образом, температура горячих электронов в нижней подзоне по оценкам не должна превышать 40 К, что создаёт благоприятные условия для усиления на примесно-зонных оптических переходах. Коэффициент усиления для частот в диапазоне 3–3.4 ТГц по измерениям составлял ~100 см⁻¹. Отметим, что гетероструктуры с квантовыми ямами имеют дополнительное преимущество, связанное с возможностью увеличить сечение фотовозбуждения примесей при использовании поляризации, в которой электрическое поле волны перпендикулярно плоскости квантовой ямы (ТМ поляризация). Сечение фотоионизации доноров при латеральной поляризации излучения в приближении двумерного слоя для GaAs составляет ~5 ×

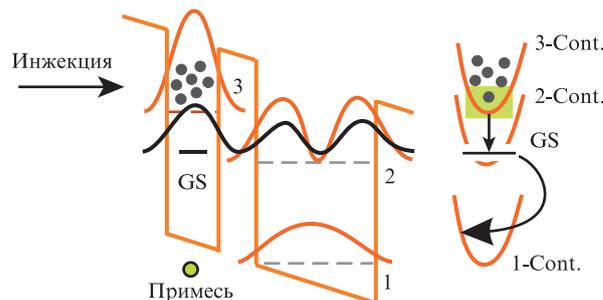


Рис.4. Схема каскадного лазера на примесно-зонных оптических переходах в квантовых ямах. Волновые функции подзон показаны серым цветом; GS – уровень основного состояния примеси, соответствующая волновая функция показана чёрным цветом. Справа – оптические (вертикальная стрелка) и туннельные (изогнутая стрелка) переходы с испусканием оптических фононов, Cont. с нумерацией, соответствующей подзонам, – континуумы подзон.

10⁻¹⁶ см² при $\hbar\Omega = 117$ мэВ. Для ТМ поляризации сечение фотоионизации донора сопоставимо с сечением фотоионизации квантовых ям или межподзонных переходов. Выбором глубины квантовых ям это сечение можно максимизировать. В квантовых ямах In_{0.17}Ga_{0.83}As/GaAs [9], параметры которых не оптимальны с точки зрения фотоионизации, её сечение составляет ~10⁻¹⁴ см² при $\hbar\Omega = 117$ мэВ. В этих структурах эффекты усиления были обнаружены при довольно низкой (~1 кВт/см²) плотности мощности накачки.

При использовании токовой накачки в целях ослабления разогрева электронов можно в гетероструктурах с квантовыми ямами применять вертикальный транспорт. Принцип формирования инвертированного распределения, рассмотренный в [10], можно пояснить с помощью рис.4, где показаны волновые функции электронов 2D подзон в системе туннельно-связанных квантовых ям периода каскада. Узкая квантовая яма селективно легирована донорами или акцепторами. Другие параметры структуры должны быть выбраны такими, чтобы уровень GS основного состояния примеси (нижнего резонансного состояния под подзоной 3) приблизительно совпадал с дном подзоны 2. При рабочем напряжении волновая функция основного состояния кулоновского центра, показанная чёрным цветом, проникает в широкую яму каскада, что объясняется гибридизацией этого состояния с состояниями подзоны 2. В случае быстрой релаксации электрона из 2-й подзоны в 1-ю с излучением оптического фонона на оптическом переходе 3-Cont.–GS (рис.4) может сформироваться инверсная населённость состояний. Таким образом, ранее рассматриваемая оптическая накачка инверсии населённости на переходе Cont.–GS благодаря эффекту резонансного туннелирования может быть заменена токовой. Подчеркнем, что при использовании такой схемы темп ионизации кулоновского центра может быть достаточно высоким (до ~10¹² с⁻¹ [10]) и заметно превышать темп рекомбинации.

Токовая накачка на основе квантово-каскадных гетероструктур имеет по сравнению с оптической накачкой свою специфику. Во-первых, работа такой схемы при вертикальном транспорте предполагает сравнительно быстрое опустошение основного состояния примеси при туннелировании электрона в широкую квантовую яму (рис.4), для чего необходимо подмешивание волновой функции 2-й подзоны к основному состоянию (эффект гибридиза-

ции). Эффект гибридизации приводит к уменьшению вклада 3-й подзоны в волновую функцию основного состояния и, следовательно, к уменьшению матричных элементов примесно-зонных оптических переходов [10]. Таким образом, матричные элементы оптических переходов с участием резонансных состояний будут меньше, чем для истинно локализованных состояний в рассмотренной выше схеме с оптической накачкой.

Вторая особенность схемы с токовой накачкой также негативно влияет на усиление. Она связана с объединением в условиях резонансного туннелирования рабочей подзоны (на рис.4 – это 3-я подзона) с нижней подзоной предыдущего каскада в инжекционный дублет [10] (на рисунке не показано). Это приводит к распределению инжектируемых электронов по двум подзонам дублета и к соответствующему двукратному уменьшению чисел заполнения в них.

Предварительные расчёты для квантово-каскадных гетероструктур n-GaAs/AlGaAs, n-Si/SiGe(111) и p-Ge/GeSi показали, что усиление в них на рабочих примесно-зонных переходах сопоставимо (в пределах точности использованных моделей) с потерями Друде. Разительное отличие квантово-каскадных схем от схем с оптической накачкой обусловлено, главным образом, указанными двумя негативными факторами, присущими токовой накачке. Дальнейшее продвижение в изучении квантово-каскадных схем должно быть связано с уточнением теоретических моделей и подходов, а также с проведением экспериментальных исследований. Перспективность квантово-каскадной схемы усиления на примесно-зонных переходах может быть обусловлена мерами по уменьшению разогрева электронов, а также модификацией схемы.

В заключение сформулируем основные выводы. Показано, что схема усиления на примесно-зонных оптических переходах является работоспособной, но при небольших температурах электронов (дырок). Представлены аналитические оценки сечений усиления и поглощения в трёхмерном и двумерном случаях, с помощью которых можно анализировать условия достижения усиления в зависимости от параметров материалов и температуры электронов. Схема усиления на примесно-зонных переходах является вполне перспективной при оптической накачке. В рассмотренном примере квантово-каскадной схемы усиления поглощение оказалось сопоставимым (в пределах точности использованных моделей) с усилением. Ухудшение соотношения между усилением и поглощением обусловлено спецификой схемы токовой накачки в квантово-каскадных гетероструктурах: уменьшением дипольных матричных элементов рабочих оптических пере-

ходов вследствие эффекта гибридизации, а также уменьшением чисел заполнения в континууме рабочей подзоны из-за распределения электронов по подзонам инжекционного дублета. Для окончательного ответа на вопрос о возможности усиления в квантово-каскадных схемах требуются дополнительные исследования, прежде всего экспериментальные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 12-02-01231, 13-02-12108 офи_м) и Программы Президиума РАН «Фундаментальные основы технологий наноструктур и наноматериалов».

- Williams B.S. *Nature Photon.*, **1**, 517 (2007).
- Pavlov S.G., Zhukavin R.Kh., Shastin V.N., Hübers H.-W. *Phys. Stat. Sol. (B)*, **250**, 9 (2013).
- Adam T.N., Troeger R.T., Ray S.K., Lv P.-C., Kolodzey J. *Appl. Phys. Lett.*, **83**, 1713 (2003).
- Lv P.-C., Troeger R.T., Kim S., Ray S.K., Goossen K.W., Kolodzey J., Yassievich I.N., Odnoblyudov M.A., Kagan M.S. *Appl. Phys. Lett.*, **85**, 3660 (2004).
- Lv P.-C., Troeger R.T., Adam T.N., Kim S., Kolodzey J., Yassievich I.N., Odnoblyudov M.A., Kagan M.S. *Appl. Phys. Lett.*, **85**, 22 (2004).
- Shalygin V.A., Vorobjev L.E., Firsov D.A., Panevin V.Yu., Sofronov A.N., Melentyev G.A., Antonov A.V., Gavrilenko V.I., Andrianov A.V., Zakharyin A.O., Suihkonen S., Törma P.T., Ali M., Lipsanen H. *J. Appl. Phys.*, **106**, 123523 (2009).
- Zakhar'in A.O., Andrianov A.V., Egorov A.Yu., Zinov'ev N.N. *Appl. Phys. Lett.*, **96**, 211118 (2010).
- Hübers H.-W., Pavlov S.G., Shastin V.N. *Semicond. Sci. Technol.*, **20**, S211 (2005).
- Бекин Н.А., Жукавин Р.Х., Ковалевский К.А., Павлов С.Г., Звонков Б.Н., Ускова Е.А., Шагин В.Н. *ФТП*, **39**, 76 (2005).
- Бекин Н.А., Шагин В.Н. *ФТП*, **42**, 622 (2008).
- Бекин Н.А., Павлов С.Г. *Physica B*, **404** (23-24), 4716 (2009).
- Басов Н.Г., Вул Б.М., Попов Ю.М. *ЖЭТФ*, **37**, 587 (1959).
- Altermatt P.P., Schenk A., Heiser G. *J. Appl. Phys.*, **100**, 113714 (2006).
- Абакумов В.Н., Перель В.И., Яссиевич И.Н. *Безызлучательная рекомбинация в полупроводниках* (С.-Петербург, изд-е НИИ ядерной физики, 1997).
- Абакумов В.Н., Перель В.И., Яссиевич И.Н. *ЖЭТФ*, **72**, 674 (1977).
- Thomas G.A., Capizzi M., DeRosa F., Bhatt R.N., Rice T.M. *Phys. Rev. B*, **23**, 5472 (1981).
- Sciar N. *Progr. Quantum Electron.*, **9**, 149 (1984).
- Yang X.L., Guo S.H., Chan F.T., Wong K.W., Ching W.Y. *Phys. Rev. A*, **43**, 1186 (1991).
- Кардона Ю.П. М. *Основы физики полупроводников* (М.: Физматлит, 2002).
- Конзуэлл Э. *Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях* (М.: Мир, 1970).
- Зеегер К. *Физика полупроводников* (М.: Мир, 1977).
- Conwell E., Weisskopf V.F. *Phys. Rev.*, **77**, 388 (1950).
- Stern F., Howard W.E. *Phys. Rev.*, **163**, 816 (1967).
- Chaudhuri S. *Phys. Rev. B*, **26**, 6593 (1982).
- Benzaquen M., Walsh D., Mazuruk K. *Phys. Rev. B*, **36**, 4748 (1987).