

# Численное исследование распространения короткоимпульсного лазерного излучения в турбулентной атмосфере

В.А.Банах, Л.О.Герасимова, И.Н.Смалихо

*Представлен алгоритм численного моделирования распространения короткоимпульсного лазерного излучения в турбулентной атмосфере на основе решения параболического волнового уравнения для комплексной спектральной амплитуды поля волны методом расщепления по физическим факторам. Приведены примеры использования этого алгоритма для моделирования распространения импульсного когерентного пространственно ограниченного пучка и плоской волны. Показано, что в режиме сильной оптической турбулентности относительная дисперсия флуктуаций плотности энергии импульсного излучения фемтосекундной длительности становится существенно меньше относительной дисперсии интенсивности непрерывного излучения.*

**Ключевые слова:** короткоимпульсное излучение, комплексная спектральная амплитуда, турбулентная атмосфера, волновое параболическое уравнение, метод расщепления по физическим факторам.

## 1. Введение

Развитие фемтосекундной оптики и возможность ее применения в атмосферных задачах [1] определяет актуальность исследования распространения короткоимпульсного лазерного излучения в турбулентной атмосфере [2–4]. В случае узкополосного непрерывного или импульсного излучения решение задач распространения оптических волн в турбулентной атмосфере осуществляется на основе уравнений для статистических моментов комплексной амплитуды поля волны, полученных в марковском приближении из стационарного параболического волнового уравнения [5–8]. Строгое решение этих уравнений при произвольных турбулентных условиях распространения возможно лишь для функции когерентности второго порядка, а для статистических моментов более высокого порядка известны лишь асимптотические решения в режимах слабых и сильных флуктуаций интенсивности [7, 8]. Более того, даже уравнение для второго статистического момента не имеет строгого решения, если оно записано для полей на разных частотах, что требуется при решении задач распространения импульсного излучения в турбулентной атмосфере. Решение статистических задач распространения оптического излучения при произвольных турбулентных условиях возможно на основе численных методов, в частности метода расщепления по физическим факторам (РФФ) [9].

В случае широкополосного излучения, когда длительность импульса может составлять всего несколько периодов волны, для исследования распространения лазерного импульса в турбулентной атмосфере необходимо привлекать нестационарное волновое уравнение [10]. Из послед-

него в параксиальном приближении можно получить уравнения для функций когерентности (статистических моментов) спектральных амплитуд поля лазерного пучка. Однако решение этих уравнений при произвольных значениях параметров задачи возможно лишь для функции когерентности второго порядка. Особенности дифракционного расплывания широкополосных импульсных лазерных пучков в отсутствие турбулентности рассматривались в работах [11–17].

В настоящей работе для исследования распространения короткоимпульсного лазерного излучения в турбулентной атмосфере предлагается использовать алгоритм численного моделирования, построенный на основе решения параболического волнового уравнения для комплексной спектральной амплитуды поля волны методом РФФ. Дано описание алгоритма и приведены примеры моделирования. С использованием предложенного алгоритма и метода Монте-Карло анализируется относительная дисперсия флуктуаций плотности энергии излучения для режимов плоской волны и узкого лазерного пучка.

## 2. Параболическое волновое уравнение

Пусть импульсное лазерное излучение распространяется в турбулентной атмосфере вдоль оси  $x \geq 0$ . Обозначим через  $E(x, \rho, t)$  комплексную напряженность электрического поля волны в точке  $(x, \rho)$  в момент времени  $t$  ( $\rho = \{y, z\}$  – радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оптической оси). Будем считать, что излучение лазера полностью когерентно, и напряженность  $E(x, \rho, t)$  в начальной плоскости представима в виде

$$E(0, \rho, t) = E_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a_0^2} - \frac{t^2}{2\tau_0^2} - 2\pi j f_0 t + j\psi_0\right), \quad (1)$$

где  $E_0 = E(0, 0, 0)$  – амплитуда на оси;  $a_0$  и  $\tau_0$  – начальные радиус пучка и длительность импульса, определяемые по уменьшению  $|E(0, \rho, 0)|^2$  и  $|E(0, 0, t)|^2$  соответственно до уровня  $e^{-1}$ ;  $j = \sqrt{-1}$ ;  $f_0$  – частота в точке максимума спек-

В.А.Банах, Л.О.Герасимова, И.Н.Смалихо. Институт оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН, Россия, 634021 Томск, пл. Акад. Зуева, 1; e-mail: banakh@iao.ru

Поступила в редакцию 10 июля 2014 г., после доработки – 10 сентября 2014 г.

тра излучения;  $\psi_0$  – фаза волны, не зависящая от  $\rho$  и  $t$ . При этом длительность импульса  $\tau_p(x)$ , определяемая по уменьшению величины

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^2\rho |E(x, \rho, t)|^2$$

до уровня 1/2 справа и слева от точки максимума  $t = t_{\max}$ , в плоскости  $x = 0$  связана с  $\tau_0$  соотношением  $\tau_p(0) = 2\sqrt{\ln 2} \tau_0$ .

В отсутствие нелинейного взаимодействия излучения со средой и если можно пренебречь поглощением излучения воздухом и аэрозольными частицами, комплексная спектральная амплитуда напряженности поля волны

$$\tilde{E}(x, \rho, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt E(x, \rho, t) \exp(2\pi j f t) \quad (2)$$

описывается уравнением [10]

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}(x, \rho, f)}{\partial x^2} + \Delta_{\perp} \tilde{E}(x, \rho, f) + \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 n^2(x, \rho, f) \tilde{E}(x, \rho, f) = 0 \quad (3)$$

с граничным условием

$$\tilde{E}(0, \rho, f) = \sqrt{2\pi} \tau_0 E_0 \exp\left[-\frac{\rho^2}{2a_0^2} - \frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2} + j\psi_0\right], \quad (4)$$

где  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  – поперечный оператор Лапласа;  $c$  – скорость света в вакууме;  $n(x, \rho, f)$  – показатель преломления воздуха, зависящий от длины волны излучения  $\lambda = cf$ ;  $\sigma_f = (2\pi\tau_0)^{-1}$  – ширина спектра излучения, определяемая по спаду  $|\tilde{E}(0, 0, f)|^2$  от точки максимума до уровня  $e^{-1}$ .

Будем считать, что на трассе распространения показатель преломления воздуха является статистически однородным полем, и для него воспользуемся моделью сухого воздуха [6]

$$n(x, \rho, f) = 1 + 10^{-6} \frac{P_a}{T(x, \rho)} \left[ 77.6 + \frac{0.584}{\lambda_0^2} \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \right], \quad (5)$$

где  $P_a$  – атмосферное давление в миллибарах;  $T(x, \rho)$  – температура воздуха в кельвинах;  $\lambda_0 = cf_0$  (в мкм). С учетом того, что в атмосфере усредненная по ансамблю реализаций температура  $\langle T \rangle$  много больше турбулентных флуктуаций температуры  $T'(x, \rho) = T(x, \rho) - \langle T \rangle$  [6], показатель преломления представим в виде

$$n(x, \rho, f) = \langle n(f) \rangle + n'(x, \rho, f), \quad (6)$$

где

$$\langle n(f) \rangle = 1 + 10^{-6} \frac{P_a}{\langle T \rangle} \left[ 77.6 + \frac{0.584}{\lambda_0^2} \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \right] \quad (7)$$

– среднее значение и

$$n'(x, \rho, f) = [1 - \langle n(f) \rangle] T'(x, \rho) / \langle T \rangle \quad (8)$$

– флуктуации показателя преломления, вызываемые турбулентными вариациями температуры воздуха. Учиты-

вая, что в атмосфере  $|n'(x, \rho, f)| \ll 1$  [5], в (3) воспользуемся приближенным равенством

$$n^2(x, \rho, f) = \langle n(f) \rangle^2 [1 + 2n'(x, \rho, f) / \langle n(f) \rangle]. \quad (9)$$

Если влияние турбулентных флуктуаций показателя преломления и дифракции излучения на спектральную амплитуду напряженности  $\tilde{E}(x, \rho, f)$  пренебрежимо мало (режим плоской волны), в (3) можно отбросить второе слагаемое и заменить  $n(x, \rho, f)$  на  $\langle n(f) \rangle$ . Тогда решение уравнения (3) имеет вид [10]

$$\tilde{E}(x, \rho, f) = \tilde{E}(0, \rho, f) \exp[2\pi j f \langle n(f) \rangle x / c]. \quad (10)$$

Мощность излучения определяется как

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\rho I(x, \rho, t),$$

где  $I(x, \rho, t) = |E(x, \rho, t)|^2$  – интенсивность (плотность мощности) излучения и, в соответствии с (2),

$$E(x, \rho, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \tilde{E}(x, \rho, f) \exp(-2\pi j f t). \quad (11)$$

Из (4), (10) и (11) получаем

$$P(x, t) = 2(\pi\tau_0 a_0 E_0)^2 \times \left| \int_{-\infty}^{+\infty} df \exp\left\{-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2} - 2\pi j [t - \langle n(f) \rangle x / c] f\right\} \right|^2, \quad (12)$$

где  $\langle n(f) \rangle$  описывается формулой (7). Интеграл в (12) можно вычислить аналитически, если воспользоваться разложением функции  $\Omega(f) = f \langle n(f) \rangle$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $f = f_0$  и ограничиться первыми тремя членами ряда [10]. В результате зависимость длительности импульса от расстояния  $x$  такова:

$$\tau_p(x) = 2\sqrt{\ln 2} \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi} \mu \frac{x}{c\tau_0 f_0}\right)^2}, \quad (13)$$

где безразмерный параметр  $\mu$  определяется выражением

$$\mu = 10^{-6} \frac{P_a}{\langle T \rangle} \frac{0.584}{\lambda_0^2}. \quad (14)$$

В (14)  $P_a$ ,  $T$  и  $\lambda_0$  даны в тех же единицах, что и в формуле (5).

Согласно расчету по формулам (13) и (14) при  $\tau_0 = 3$  фс ( $\tau_p(0) = 5$  фс),  $\lambda_0 = 1$  мкм ( $f_0 = 300$  ТГц),  $P_a = 1013$  мбар и  $\langle T \rangle = 288$  К, длительность импульса на расстоянии  $x = 1$  км в 2358 раз превышает начальную длительность импульса ( $c\tau_p(x) = 1.5$  мкм при  $x = 0$  и  $c\tau_p(x) = 3.5$  мм при  $x = 1$  км).

Далее будем учитывать дифракцию лазерного пучка и его искажения на турбулентных неоднородностях показателя преломления. По аналогии с (10) представим спектральную амплитуду напряженности поля волны в следующем виде

$$\tilde{E}(x, \rho, f) = U(x, \rho, f) \exp[2\pi j f \langle n(f) \rangle x / c]. \quad (15)$$

После подстановки (15) в (3) получаем уравнение для комплексной спектральной амплитуды  $U(x, \rho, f)$ , в кото-

ром можно пренебречь слагаемым  $\partial^2 U(x, \rho, f) / \partial x^2$ . В итоге, заменив  $\langle n(f) \rangle$  на единицу (т. к. показатель преломления воздуха отличен от единицы в четвертом знаке после запятой) и  $n'(x, \rho, f)$  на  $n'(x, \rho)$  (в диспергирующей среде зависимость турбулентных флуктуаций показателя преломления от частоты  $f$  можно пренебречь), с учетом (9) приходим к параболическому волновому уравнению

$$j \frac{4\pi f}{c} \frac{\partial U(x, \rho, f)}{\partial x} + \Delta_{\perp} U(x, \rho, f) + 2 \left( \frac{2\pi f}{c} \right)^2 \times n'(x, \rho) U(x, \rho, f) = 0. \quad (16)$$

Поскольку  $U(0, \rho, f) = \tilde{E}(0, \rho, f)$ , граничное условие для уравнения (16) определяется формулой (4).

### 3. Метод РФФ для численного решения параболического волнового уравнения

Для численного решения уравнения (16) воспользуемся методом РФФ [9], суть которого применительно к нашему случаю заключается в следующем. Вся трасса распространения длиной  $L$  разбивается на  $N$  слоев толщиной  $\Delta x = L/N$ . Комплексная спектральная амплитуда  $U(x, \rho, f)$  для каждой частоты  $f$ , где  $x_i = i\Delta x$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) рассчитывается последовательно при переходе от слоя к слою. Решение уравнения (16) в конце  $i$ -го слоя ( $x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + \Delta x]$ ) находится в два этапа.

1. Учитываются лишь фазовые искажения, получаемые волной на частоте  $f$  при ее прохождении через турбулентные неоднородности показателя преломления внутри слоя. Тогда спектральная амплитуда поля волны, которую обозначим как  $U_1(x_i, \rho, f)$ , описывается уравнением (16) при равенстве второго слагаемого нулю и замене  $U(x_i, \rho, f)$  на  $U_1(x_i, \rho, f)$  с граничным условием

$$U_1(x_{i-1}, \rho, f) = U(x_{i-1}, \rho, f). \quad (17)$$

С учетом (17) решение этого уравнения имеет вид

$$U_1(x_i, \rho, f) = U(x_{i-1}, \rho, f) \exp[j\Psi_i(\rho, f)], \quad (18)$$

где

$$\Psi_i(\rho, f) = (2\pi f/c) \int_0^{\Delta x} dx' \tilde{n}(x_{i-1} + x', \rho) \quad (19)$$

– случайный фазовый экран.

2. Учитывается лишь дифракция волны. Тогда спектральная амплитуда поля волны, которую обозначим как  $U_2(x_i, \rho, f)$ , описывается уравнением (16) при равенстве третьего слагаемого нулю и замене  $U(x_i, \rho, f)$  на  $U_2(x_i, \rho, f)$  с граничным условием

$$U_2(x_{i-1}, \rho, f) = U_1(x_i, \rho, f). \quad (20)$$

Применив прямое двумерное преобразование Фурье

$$\tilde{U}_2(x, \kappa, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho U_2(x, \rho, f) \exp(-2\pi j \kappa \rho), \quad (21)$$

где  $\kappa = \{\kappa_y, \kappa_z\}$  – вектор пространственных частот, из уравнения для  $U_2$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\tilde{U}_2$ , решение которого с учетом (20) и (21) имеет вид

$$\tilde{U}_2(x_i, \kappa, f) = \tilde{U}_2(x_{i-1}, \kappa, f) \exp(-j\pi \kappa^2 \Delta x c / f), \quad (22)$$

где

$$\tilde{U}_2(x_{i-1}, \kappa, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho U_1(x_i, \rho, f) \exp(-2\pi j \kappa \rho). \quad (23)$$

Наконец, спектральная амплитуда  $U(x_i, \rho, f) = U_2(x_i, \rho, f)$  рассчитывается путем применения обратного двумерного преобразования Фурье:

$$U(x_i, \rho, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \kappa \tilde{U}_2(x_i, \kappa, f) \exp(2\pi j \kappa \rho). \quad (24)$$

Из моделируемых спектральных амплитуд  $U(L, \rho, f)$  можно рассчитать спектральную интенсивность

$$S_I(L, \rho, f) = |U(L, \rho, f)|^2, \quad (25)$$

спектральную мощность

$$S_P(L, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho S_I(L, \rho, f) \quad (26)$$

и плотность энергии излучения

$$W(L, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt I(L, \rho, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt |E(L, \rho, t)|^2. \quad (27)$$

Из (11), (15), (25) и (27) получаем соотношение

$$W(L, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} df S_I(L, \rho, f). \quad (28)$$

Можно показать, что если на трассе распространения длиной  $L$  поглощение энергии излучения несущественно,  $S_P(L, f)$ , в отличие от  $S_I(L, \rho, f)$ , не зависит от  $L$ , т. е.  $S_P(L, f) = S_P(0, f)$  [10]. Для учета же поглощения следует рассчитывать значения  $U(x_i, \rho, f)$  домножать на  $\exp[-\alpha(f) \times \Delta x / 2]$  в каждом слое разбиения трассы распространения, где  $\alpha(f)$  – коэффициент поглощения энергии излучения атмосферным воздухом и аэрозолями.

### 4. Численное моделирование случайных фазовых экранов

Для моделирования случайных реализаций фазового экрана  $\Psi_i(\rho, f)$  необходимо знать его статистические свойства. Будем считать, что внутри  $i$ -го слоя разбиения трассы распространения плотность вероятностей  $p(\Psi_i)$  распределена по нормальному закону. Основной вклад в искажения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере, вносят неоднородности показателя преломления, структура которых подчиняется фундаментальному закону Колмогорова–Обухова [5]. Поэтому для структурной функции фазы волны

$$\begin{aligned} D_{\Psi}(r, f) &= \langle [\Psi_i(\rho + r, f) - \Psi_i(\rho, f)]^2 \rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \kappa S_{\Psi}(\kappa, f) [1 - \exp(2\pi j \kappa r)] \end{aligned} \quad (29)$$

воспользуемся моделью спектра флуктуаций фазы  $S_{\Psi}(\kappa, f)$  в виде [5–8, 18]

$$S_{\Psi}(\kappa, f) = 0.382 C_n^2 \Delta x (f/c)^2 |\kappa|^{-11/3}, \quad (30)$$

где  $C_n^2$  – структурная характеристика турбулентных пульсаций показателя преломления воздуха.

С использованием (30) случайные независимые реализации  $\Psi_i(\rho, f_0)$  ( $\langle \Psi_i \Psi_{i' \neq i} \rangle = 0$ ) моделируются на расчетной сетке размерностью  $M \times M$  с шагом  $h$  путем применения двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ) к генерируемому на компьютере массиву комплексных спектральных амплитуд фазы [9, 18–20]. Для получения реализаций случайного фазового экрана на других частотах  $f$  используется соотношение  $\Psi_i(\rho, f) = (f/f_0) \Psi_i(\rho, f_0)$ .

После подстановки (30) в (29) и вычисления интеграла получаем известное выражение [6]

$$D_{\Psi}(r, f) = 2.92 C_n^2 \Delta x (2\pi f/c)^2 |r|^{5/3}. \quad (31)$$

Вследствие того, что  $h > 0$  и  $Mh < \infty$ , структурная функция моделируемых фазовых экранов отличается от таковой, полученной в результате расчета по формуле (31). При этом  $h$  и  $Mh/2$  можно считать аналогами внутреннего и внешнего масштабов турбулентности соответственно. Для того чтобы при  $h \ll |r| \leq Mh$  структурная функция моделируемого фазового экрана совпадала с результатами расчета по формуле (31), можно воспользоваться методом субгармоник [19, 20].

## 5. Численное моделирование случайных реализаций и расчет статистических характеристик плотности энергии излучения

Расчеты спектральной амплитуды  $U(x_i, \rho, f)$  с использованием метода РФФ и алгоритма генерации случайных фазовых экранов осуществляются в каждом слое разбиения трассы для  $K + 1$  пучков на частотах  $f = f_0 + (k - K/2)\Delta f$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ,  $\Delta f$  – шаг по частоте) в узлах равномерной сетки  $\rho = \{(m_y - M/2)h, (m_z - M/2)h\}$  ( $m_{y,z} = 0, 1, \dots, M - 1$ ). Для вычисления  $\tilde{U}_2(x_i, \kappa, f)$  в узлах расчетной сетки  $\kappa = \{k_y/(Mh), k_z/(Mh)\}$  ( $k_{y,z} = 0, 1, \dots, M - 1$ ) и  $U(x_i, \rho, f)$  вместо интегрирования, согласно формулам (23) и (24), применяется прямое и обратное двумерное БПФ соответственно. Значения  $K$  и  $M$  определяют размерность трехмерных массивов ( $K \times M \times M$ ) рассчитываемых комплексных величин и объем требуемой оперативной памяти компьютера. Шаг по частоте  $\Delta f$  должен удовлетворять условиям  $\Delta f \ll \sigma_f$  и  $K\Delta f \gg \sigma_f$ . При вычислении случайной плотности энергии излучения  $W(L, \rho)$  по формулам (25) и (28) интегрирование  $|U(L, \rho, f)|^2$  по  $f$  заменяется суммированием по всем индексам  $k$ .

Воспользовавшись достаточно большим количеством независимых реализаций  $W(L, \rho)$ , полученных в результате численного моделирования, можно оценивать различные статистические характеристики, в частности среднее значение  $\langle W(L, \rho) \rangle$  и относительную дисперсию  $\sigma_W^2$  плотности энергии излучения:

$$\sigma_W^2(L, \rho) = \langle W^2(L, \rho) \rangle / \langle W(L, \rho) \rangle^2 - 1. \quad (32)$$

## 6. Результаты численного моделирования

Для численного моделирования случайных распределений  $W(L, \rho)$  мы задавали следующие параметры:  $\lambda_0 =$

1 мкм ( $f_0 = 300$  ТГц),  $\tau_p = 5$  фс ( $\tau_0 = 3$  фс,  $\sigma_f = 53$  ТГц),  $a_0 = 1.26$  см (узкий пучок) и 5 см,  $\infty$  (плоская волна) и  $L = 1$  км. Для таких значений  $\lambda_0$  и  $\tau_0$  спектр излучения отличен от нуля в интервале частот 100–500 ТГц, которому соответствует интервал длин волн 0.6–3 мкм. В каждом узле расчетной сетки с  $h = 2$  мм и  $M = 512$  значения комплексной спектральной амплитуды вычислялись для 41 спектрального канала шириной  $\Delta f = 10$  ТГц, т.е. в дискретном представлении частота  $f = f_1 + k\Delta f$  при  $f_1 = 100$  ТГц,  $k = 0, 1, \dots, K$  и  $K = 40$ .

Параллельно с  $W(L, \rho)$  рассчитывалась спектральная интенсивность  $S_I(L, \rho, f_0)$  и нормированная интенсивность  $I_N(L, \rho) = S_I(L, \rho, f_0) / S_I(0, 0, f_0)$  узкополосного (непрерывного) лазерного излучения. За время измерения  $\Delta t$ , удовлетворяющее в случае импульсного излучения условию  $f_p^{-1} \gg \Delta t \gg \tau_p(L)$  ( $f_p$  – частота следования импульсов), интенсивность  $I(L, \rho)$  непрерывного излучения с частотой  $f_0$  не изменится. Следовательно, измеряемая за время  $\Delta t$  плотность энергии  $W(L, \rho)|_{t_0=\infty} = \Delta t I(L, \rho)$  после нормировки на  $W(0, 0)|_{t_0=\infty}$  представляет собой  $I_N(L, \rho)$ . Сравнение нормированных плотности энергии импульса  $W_N(L, \rho) = W(L, \rho) / W(0, 0)$  и интенсивности непрерывного излучения  $I_N(L, \rho)$  для одного и того же сгенерированного массива случайных фазовых экранов позволяет увидеть качественное и количественное различие этих характеристик в одной и той же реализации.

На рис.1 и 2 приведены примеры случайных распределений нормированных плотностей энергии  $I_N(L, \rho)$  и  $W_N(L, \rho)$  пучка с  $a_0 = 5$  см при  $C_n^2 = 10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$  и  $10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$  соответственно. Видно, что распределение  $W_N(L, \rho)$  является более сглаженным, чем  $I_N(L, \rho)$ . Это различие заметнее на рис.2, где представлен результат моделирования в случае более сильной турбулентности.

### 6.1. Средняя плотность энергии

На рис.3 иллюстрируется распределение нормированной средней плотности энергии пучка  $\langle W_N(L, \rho) \rangle$  с  $a_0 = 5$  см в отсутствие турбулентности (кривая 1) и при  $C_n^2 = 10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$  (кривая 2 – для непрерывного излучения и кривая 3 – для импульсного излучения с  $\tau_p(0) = 5$  фс). При  $C_n^2 = 0$ ,  $L = 1$  км,  $\lambda_0 = 1$  мкм и  $a_0 = 5$  см распределение  $\langle W_N(L, \rho) \rangle$  не зависит от  $\tau_0$ . Наличие турбулентности на такой трассе приводит к тому, что при  $C_n^2 = 10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$  эффективный радиус пучка импульсного излучения с  $\tau_p(0) = 5$  фс примерно на 4% меньше, чем для узкополосного (непрерывного) излучения. Рассматриваемый алгоритм численного моделирования применим при  $\sigma_f/f_0 \ll 1$ , что не позволяет провести расчеты распределения плотности энергии при  $\sigma_f/f_0 > 1$ , когда наиболее сильно проявляет себя эффект уменьшения дифракционного расплывания пучка [13–17].

### 6.2. Флуктуации плотности энергии

Для режима плоской волны (когда при численном моделировании можно положить  $a_0 = \infty$ ) при тех же значениях  $\lambda_0$ ,  $\tau_0$  и  $L$ , которые задавались при расчетах на рис.1 и 2, и  $C_n^2 = 10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$  из массива моделируемых случайных реализаций  $I_N(x_i, \rho)$  (непрерывное излучение) и  $W_N(x_i, \rho)$  (импульсное излучение), где  $x_i = i\Delta x$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $\Delta x = 10$  м и  $N = 100$ , мы рассчитали среднеквадратичные отклонения относительных флуктуаций плотности энергии излучения  $\sigma_W(x_i)$  с использованием данных, полученных

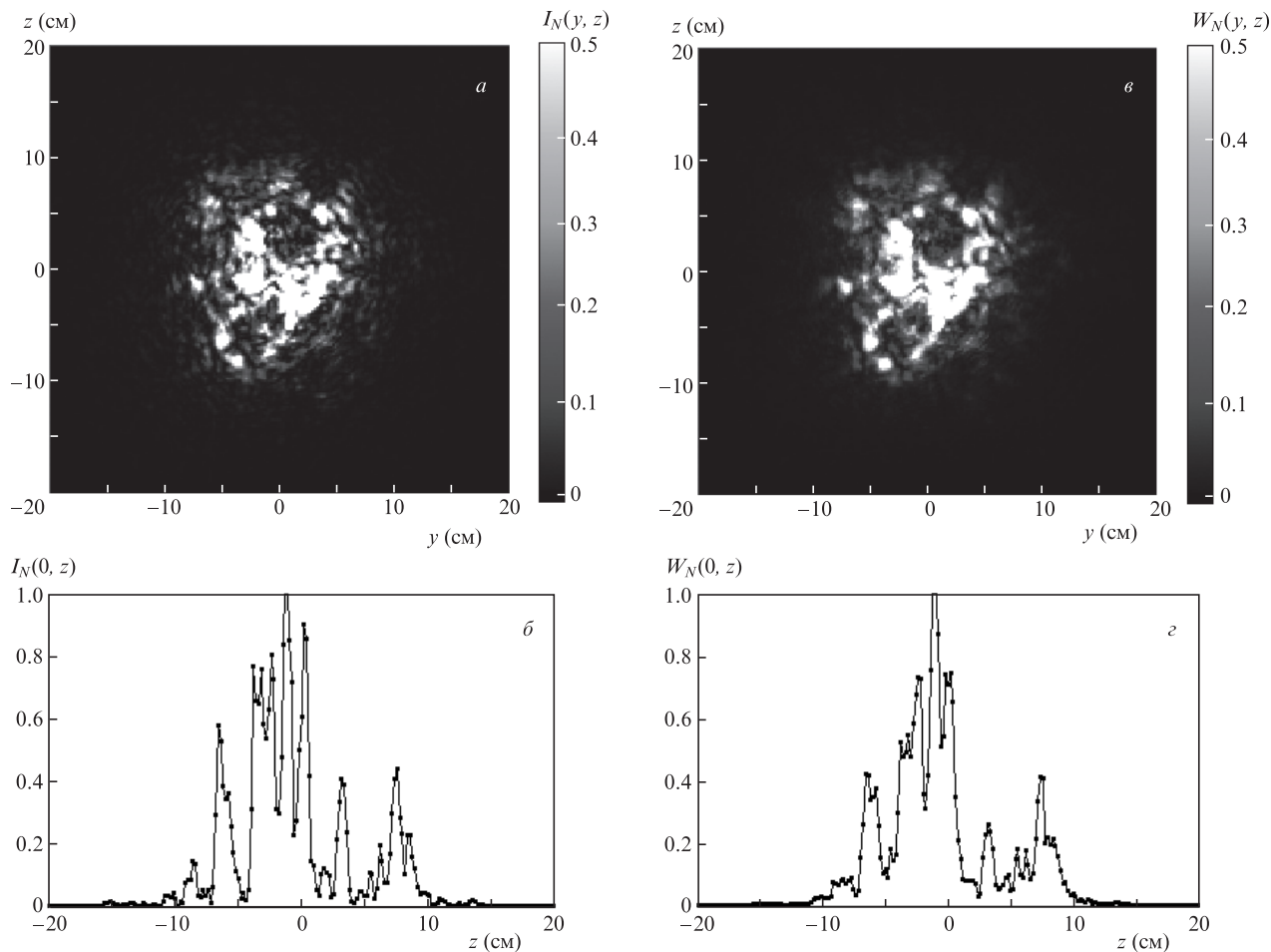


Рис.1. Двумерные (а, в) и одномерные (б, г) распределения нормированных плотностей энергии непрерывного (а, б) и импульсного (в, г) излучения при  $C_n^2 = 10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$ .

при 100 независимых статистических испытаниях. Так как для плоской волны статистические характеристики не зависят от  $\rho$ , при усреднении использовались все данные, генерируемые на компьютере в узлах расчетной сетки размерностью  $512 \times 512$ . В этом случае погрешность расчета  $\sigma_W(x_i)$  не превышает 1%.

Для непрерывного излучения  $\sigma_W$  есть ничто иное, как среднеквадратичное отклонение относительных флуктуаций интенсивности. Результаты расчетов  $\sigma_W$  в зависимости от параметра

$$\beta_0 = \sqrt{1.23 C_n^2 (2\pi/\lambda_0)^{7/6} x_i^{11/6}},$$

характеризующего интенсивность оптической турбулентности на трассе распространения длиной  $x_i$  [5–8], представлены на рис.4 в виде кривых 1 и 2. Видно, что значения  $\sigma_W$  для непрерывного и импульсного излучения при  $\beta_0 \leq 1$  различаются незначительно. С увеличением  $\beta_0$  среднеквадратичное отклонение интенсивности в обоих случаях, достигнув максимума в окрестности точки  $\beta_0 = 2$ , уменьшается. При этом кривая 2, соответствующая импульсному излучению, спадает быстрее, чем кривая 1 (непрерывное излучение), и, начиная с  $\beta_0 \approx 3.3$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma_W$  для импульсного излучения становится меньше единицы. В то же время  $\sigma_W$  для непрерывного излучения при  $\beta_0 > 1$  превышает единицу и в пределе при  $\beta_0 \rightarrow \infty$  стремится к единице [6–8].

Для плоской волны среднее значение спектральной интенсивности  $S_I(x_i, \rho, f)$  не зависит от  $(x_i, \rho)$  и определяется выражением  $\langle S_I(f) \rangle = |\bar{E}(0, \rho, f)|^2$  при  $a_0 = \infty$  (см. формулу (4)), а относительная дисперсия плотности энергии  $\sigma_W^2(x_i, \rho)$  зависит только от  $x_i$ . Тогда из (28) и (32) имеем

$$\sigma_W^2(x_i) = (\sqrt{\pi} \tau_0 E_0^2)^{-2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 \langle S_I(f_1) \rangle \langle S_I(f_2) \rangle K_s(x_i, f_1, f_2), \quad (33)$$

где  $K_s(x_i, f_1, f_2) = \langle s(x_i, \rho, f_1) s(x_i, \rho, f_2) \rangle$  – частотная корреляция нормированных флуктуаций интенсивности излучения  $s(x_i, \rho, f) = S_I(x_i, \rho, f) / \langle S_I(f) \rangle - 1$ . Из эксперимента [21] следует, что с ростом  $\beta_0$  в интервале 0–1 отношение  $K_s(x_i, f_1, f_2) / K_s(x_i, f, f)$ , где  $f = (f_1 + f_2)/2$  и  $f_1 \neq f_2$ , остается близким к единице и уменьшается при  $\beta_0 > 1$ . Поэтому, с учетом (33), при  $2\sigma_f/f_0 = 0.353$  в области сильных флуктуаций интенсивности, когда параметр  $\beta_0 \gg 1$ , уровень флуктуаций плотности энергии излучения существенно ниже в случае импульса длительностью  $\tau_0 = 3$  фс, чем для узкополосного излучения ( $\tau_0 \rightarrow \infty$ ).

В процессе численного моделирования, имитирующего распространение фемтосекундного импульса в турбулентной атмосфере, на компьютере можно наблюдать, как изменяется форма спектра  $S_I(x_i, \rho, f)$  с увеличением индекса  $i$  при фиксированном  $\rho$ . По мере распростране-

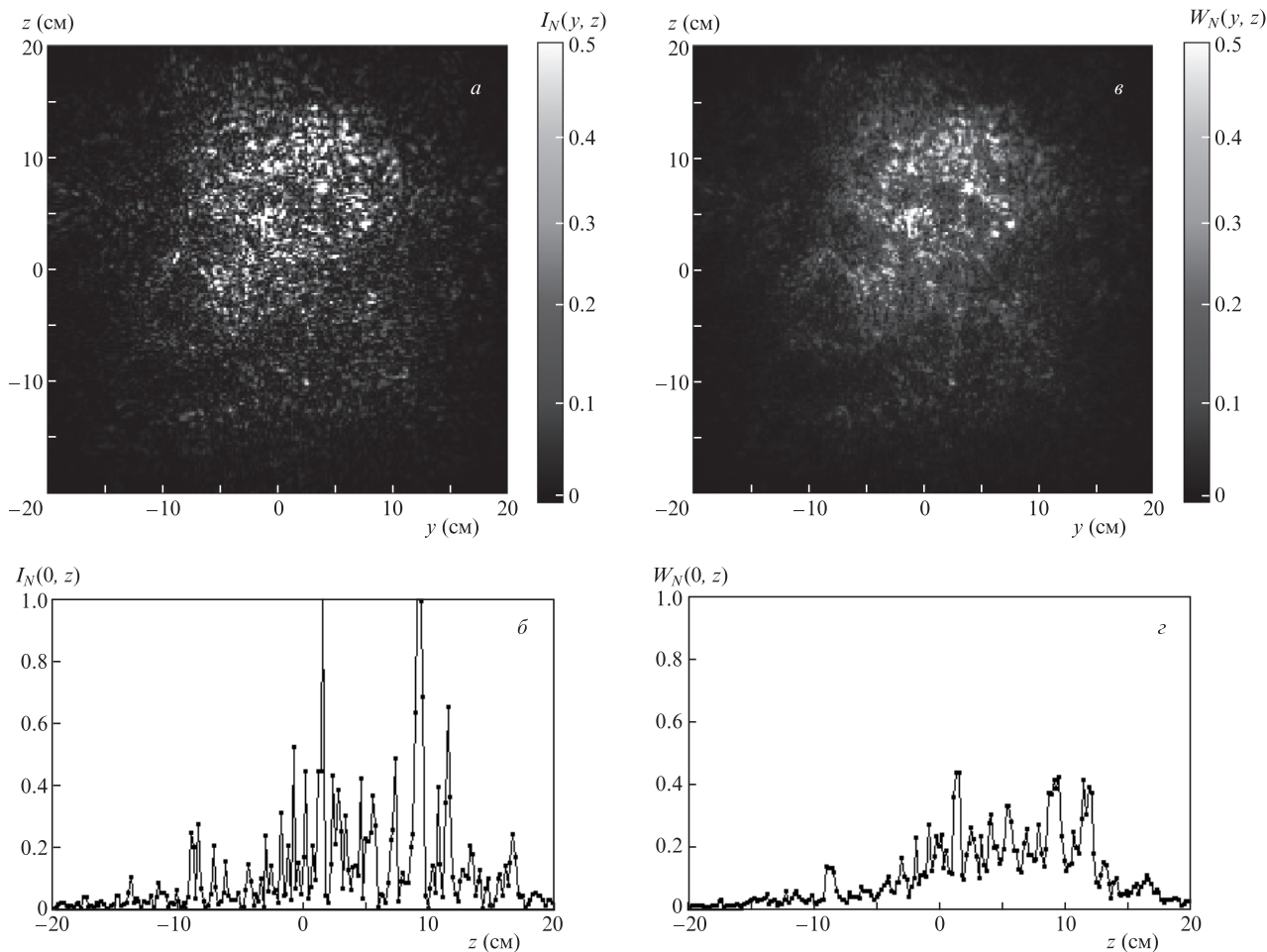


Рис.2. Двумерные (а, б) и одномерные (в, г) распределения нормированных плотностей энергии непрерывного (а, в) и импульсного (б, г) излучения при  $C_n^2 = 10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$ .

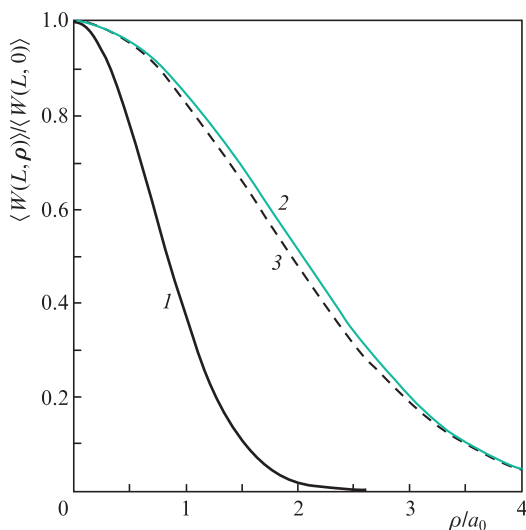


Рис.3. Распределения нормированной средней плотности энергии лазерного излучения в плоскости, поперечной оптической оси, при  $C_n^2 = 0$  (1) и  $10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$  для узкополосного излучения (2) и импульса длительностью 5 фс (3).

излучения при  $\beta_0 > 1$  характерный частотный масштаб  $f_T$  флуктуаций спектра уменьшается, вследствие чего, после интегрирования по  $f$  в (28), происходит частичное усреднение флуктуаций плотности энергии излучения. В пределе, когда  $\beta_0 \rightarrow \infty$ , отношение  $f_T / \sigma_f \rightarrow 0$  и, со-

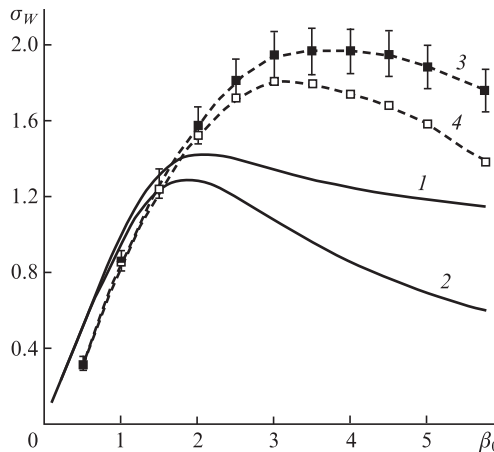


Рис.4. Зависимости среднеквадратичного отклонения относительных флуктуаций плотности энергии непрерывного излучения (1, 3) и импульсного излучения с длительностью импульса  $\tau_p(0) = 5$  фс (2, 4) в режимах плоской волны (1, 2) и узкого коллимированного пучка при  $\Omega = 1$  (3, 4) от  $\beta_0$ . Погрешности соответствуют 95%-ному доверительному интервалу.

ответственно,  $\sigma_W \rightarrow 0$ , в отличие непрерывного излучения, для которого  $\sigma_W \rightarrow 1$ . Значительно раньше эффекты декорреляции сильных флуктуаций интенсивности частотно разнесенных волн и усреднения частично когерентного непрерывного излучения в турбулентной атмосфере были описаны в работах [22–24].

Для построения кривой 2 на рис.4 мы проводили численное моделирование в 41 частотном канале ( $K = 40$ ) шириной  $\Delta f = 10$  ТГц каждый. Однако при определенных условиях масштаб  $f_T$  может стать меньше  $\Delta f$ . Мы увеличивали число  $K$  в два раза при неизменном диапазоне частот  $K\Delta f$ , центрированном относительно точки  $f_0$ , и получали результат, аналогичный показанному на рис.4 кривой 2. Таким образом, для тех  $\beta_0$ , при которых получена эта кривая, вполне достаточно использовать 41 частотный канал.

На рис.4 кривыми 3 и 4 представлены результаты численного моделирования для случая узкого коллимированного пучка, когда число Френеля  $\Omega = 2\pi a_0^2/(\lambda_0 L) = 1$ . Эти кривые представляют собой среднеквадратичные отклонения относительных флуктуаций плотности энергии непрерывного и импульсного излучения соответственно с  $\lambda_0 = 1$  мкм на оптической оси ( $\rho = 0$ ). Так как при моделировании с использованием 20 слоев разбиения мы задавали  $L = 1$  км ( $N = 20$ ,  $\Delta x = 50$  м), то для того, чтобы на конце трассы число Френеля было равно единице, мы вынуждены были полагать  $a_0 = 1.26$  см. При этом мы могли использовать для расчетов  $\sigma_W(\beta_0)$  только  $I_N(x_i, \rho)$  и  $W_N(x_i, \rho)$ , генерируемые на конце трассы распространения ( $x_i = L$ ). Поэтому, чтобы рассчитать  $\sigma_W$  при различных  $\beta_0$ , мы изменяли соответствующим образом величину  $C_n^2$ . Для расчетов  $\sigma_W$  мы использовали по 1000 независимых статистических испытаний. Отметим, что при моделировании случайных фазовых экранов для узкого пучка с  $\Omega = 1$  мы применяли метод субгармоник [19, 20], что не требовалось делать для плоской волны.

Согласно результатам, представленным на рис.4, в случае узкого коллимированного пучка, как и плоской волны, с ростом параметра  $\beta_0$  различие в уровнях флуктуаций непрерывного и короткоимпульсного излучения увеличивается. При этом заметное уменьшение  $\sigma_W$  при  $\tau_p(0) = 5$  фс относительно  $\sigma_W$  для непрерывного излучения происходит в области значений  $\beta_0 > 2$ . Видно, что по сравнению с плоской волной в случае узкого пучка эффект декорреляции флуктуаций интенсивности на разных частотах проявляется в меньшей степени. Дело в том, что, как показал анализ моделируемых данных, частотное усреднение флуктуаций плотности энергии эквивалентно действию низкочастотного пространственного фильтра, и чем больше  $\beta_0$  в области сильных флуктуаций интенсивности излучения на длине волны  $\lambda_0$ , тем меньше их характерный масштаб и, следовательно, тем сильнее усреднение. В случае пространственно ограниченного пучка с  $\Omega = 1$  и не слишком больших  $\beta_0$  (например,  $\beta_0 < 4$ ) существенный вклад во флуктуации плотности энергии (и интенсивности) излучения вносят боковые случайные смещения лазерного пучка как целого, которые практически не усредняются вследствие частотной декорреляции.

## 7. Заключение

Нами предложен алгоритм компьютерного моделирования распространения короткоимпульсного лазерного излучения в турбулентной атмосфере на основе решения параболического волнового уравнения для комплексной спектральной амплитуды поля волны методом расщепления по физическим факторам. Алгоритм позволяет проводить исследования статистических характеристик плотности энергии короткоимпульсного излучения в зависимости от дифракционных и турбулентных усло-

вий на трассе распространения. С использованием предложенного алгоритма рассчитана зависимость дисперсии  $\sigma_W^2$  флуктуаций плотности энергии фемтосекундного импульса, распространяющегося в атмосфере в режиме плоской волны, от параметра  $\beta_0$ , характеризующего турбулентные условия распространения. Показано, что с усилением оптической турбулентности (увеличением  $\beta_0$ ) зависимость  $\sigma_W(\beta_0)$  для импульсного излучения начинает все больше отличаться от известной зависимости среднеквадратичного отклонения интенсивности плоской волны  $\sigma_I(\beta_0)$  для непрерывного излучения. В пределе  $\beta_0^2 \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_W(\beta_0) \rightarrow 0$ , тогда как  $\sigma_I(\beta_0) \rightarrow 1$ .

Алгоритм может быть обобщен на случай произвольного пространственно-временного начального распределения амплитуды и фазы пучка импульсного излучения. Он может также применяться для численного исследования распространения импульсного излучения на локационных трассах [25, 26].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-02-98016-р\_сибирь).

1. Алексимов Д.В., Багаев С.Н., Гейнц Ю.Э., Землянов А.А., Кабанов А.М., Кирпичников А.В., Кистенев Ю.В., Креков Г.М., Матвиенко Г.Г., Ошлаков В.К., Панина Е.К., Петров В.В., Пестряков Е.В., Пономарев Ю.Н., Суханов А.Я., Тихомиров Б.А., Трунов В.И., Уогинтас С.Р., Фролов С.А., Худорожков Д.Г. *Фемтосекундная атмосферная оптика* (Новосибирск: изд-во СО РАН, 2010).
2. Кандидов В.П., Косарева О.Г., Тамаров М.П., Броде А., Чин С. *Квантовая электроника*, **29**, 73 (1999).
3. Шленов С.А., Федоров В.Ю., Кандидов В.П. *Оптика атмосферы и океана*, **20**, 308 (2007).
4. Кандидов В.П., Шленов С.А. *Оптика атмосферы и океана*, **25** (1), 11 (2012).
5. Татарский В.И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1967).
6. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмельцов С.С. *Лазерное излучение в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1976).
7. Рыгов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля* (М.: Наука, 1978).
8. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. *Современные проблемы атмосферной оптики* (Л.: Гидрометеиздат, 1988, т. 5).
9. Кандидов В.П. *УФН*, **166**, 1309 (1996).
10. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (М.: Наука, 1988).
11. Christov I.P. *Opt. Commun.*, **53**, 364 (1985).
12. Christov I.P. *Opt. Acta*, **33**, 63 (1986).
13. Залозная И.В., Фалиц А.В. *Оптика атмосферы и океана*, **22**, 734 (2009).
14. Banakh V.A. *Opt. Lett.*, **36**, 4554 (2011).
15. Герасимова Л.О., Залозная И.В. *Оптика атмосферы и океана*, **24**, 185 (2011).
16. Банах В.А., Герасимова Л.О., Залозная И.В., Тихомирова О.В. *Оптика атмосферы и океана*, **25**, 941 (2012).
17. Банах В.А., Герасимова Л.О. *Оптика атмосферы и океана*, **26**, 5 (2013).
18. Banakh V.A., Smalikho I.N. *Coherent Doppler Wind Lidars in a Turbulent Atmosphere* (Boston – London: Artech House, 2013).
19. Frehlich R. *Appl. Opt.*, **39**, 393 (2000).
20. Банах В.А., Смалихо И.Н., Фалиц А.В. *Оптика атмосферы и океана*, **24**, 848 (2011).
21. Гурвич А.С., Кан В. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **22**, 843 (1979).
22. Заворотный В.У. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **24**, 601 (1981).
23. Банах В.А., Булдаков В.М., Миронов В.Л. *Оптика и спектроскопия*, **54**, 1054 (1983).
24. Банах В.А., Булдаков В.М. *Оптика и спектроскопия*, **55**, 707 (1983).
25. Банах В.А., Смалихо И.Н. *Оптика атмосферы и океана*, **24**, 300 (2011).
26. Смалихо И.Н. *Оптика атмосферы и океана*, **25**, 796 (2012).