

Теория импульсно-периодического режима генерации в диодных лазерах с запаздывающей обратной связью

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев

Теоретически исследован импульсно-периодический режим генерации, возникающий в диодном лазере с запаздывающей обратной связью при изменении параметров обратной связи и уровня накачки. Предложен новый подход, позволяющий свести систему уравнений Лэнга–Кобаяши для установившегося импульсно-периодического режима к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. Приведены частные решения этого уравнения, позволяющие предсказать форму генерируемого импульса.

Ключевые слова: диодный лазер с запаздывающей обратной связью, импульсно-периодический режим генерации, уравнения Лэнга–Кобаяши.

1. Введение

Диодный лазер с запаздывающей обратной связью (ЗОС) характеризуется разнообразием реализуемых режимов работы в условиях стационарной накачки, что вызвано интерференцией лазерного поля, отраженного от внешнего зеркала, с полем, циркулирующим в собственном резонаторе. Упрощенные уравнения, предложенные в работе Лэнга–Кобаяши (ЛК) [1] для описания динамики генерации диодных лазеров с дополнительным внешним зеркалом, применимы и для описания многообразия реализуемых динамических режимов генерации [2]. Это определило их широкое использование в последующих работах по теории генерации диодных лазеров с ЗОС [3,4]. Интерес к лазерам с ЗОС вызван тем, что это простейшая система, имитирующая динамику двух идентичных оптически связанных лазеров [5]. Заметим, что во всех работах для анализа режимов работы лазера применяются численные методы, что обусловлено сложностью используемых уравнений.

Особый практический интерес представляет изучение установившихся импульсно-периодических режимов. В терминологии нелинейной динамики их возникновение означает наличие устойчивых предельных циклов в фазовом пространстве системы, на которые выходят интегральные кривые для широкого класса начальных условий.

В настоящей работе формулируется полуаналитический подход к нахождению установившихся строго периодических импульсов поля в диодном лазере с ЗОС. Сравнение найденных решений с результатами численных расчетов, выполненных в рамках подхода работы [6],

демонстрирует количественное согласие между численными и аналитическими решениями.

2. Исходные уравнения

Нелинейная динамика полупроводникового лазера с ЗОС, формируемой при отражении части излучения от внешнего зеркала (рис.1), описывается уравнениями ЛК [1]

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (1 - iR)NE + iM\epsilon^{ik}E(t - \tau_d), \quad (1)$$

$$T\frac{\partial N}{\partial t} = P - N - (1 + 2N)|E|^2.$$

Первое уравнение описывает динамику плавно изменяющейся огибающей амплитуды поля $E(t)$, где R – фактор уширения линии, M и κ – модуль и фаза коэффициента обратной связи (ОС) соответственно. Время запаздывания τ_d равно времени обхода внешней части резонатора. Отметим, что наличие мод в резонаторе, образованном выходной гранью лазерного кристалла и внешним зеркалом, в модели ЛК не учитывается.

Второе уравнение описывает динамику инверсной населенности $N(t)$, пропорциональной превышению порога генерации [7, 8] и «обезразмеренной» на время жизни фотона в собственном резонаторе $\tau_{ph} = (n_a L/c)(\ln r^{-1} + \alpha_c L)^{-1}$, где α_c – распределенные потери; L – длина собственного резонатора диода; r – амплитудный коэффициент отражения от его торцов; c – скорость света в вакууме; n_a – эф-

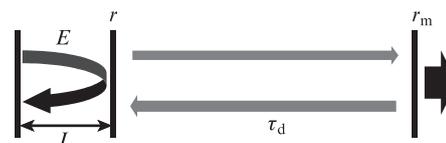


Рис.1. Схема диодного лазера с внешней ЗОС: L – длина активного кристалла; τ_d – время обода в системе обратной связи; r и r_m – амплитудные коэффициенты отражения выходного зеркала кристалла и внешнего зеркала соответственно (левое зеркало глухое).

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев. ФГУП «ГНЦ РФ – Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований», Россия, 142190 Москва, Троицк, ул. Пушкиновых, влад. 12; e-mail: napart@mail.ru, sure@triniti.ru

А.П.Напартович. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53.

Поступила в редакцию 10 июля 2014 г., после доработки – 19 сентября 2014 г.

фективный показатель преломления в активном слое. Для коэффициента усиления в активном слое использовано линейное приближение вблизи порога генерации с дифференциальным коэффициентом усиления $g = \partial G / \partial N$. Пороговая плотность носителей обусловлена потерями излучения в объеме и на торцах диодного кристалла: $N_{th} = N_{tr} + (g\tau_{ph}/n_a)^{-1}$. Здесь N_{tr} отвечает плотности носителей, при которой активная среда становится прозрачной. Мощность накачки активной среды P в таком приближении может быть выражена через скорость инжекции носителей $j/(ed)$ (e – заряд электрона, d – толщина активного слоя, j – плотность тока) и время жизни носителей τ_s в отсутствие излучения: $P = \frac{1}{2}(g\tau_{ph}/n_a)[j\tau_s/(ed) - N_{th}]$. Безразмерная амплитуда поля пропорциональна физической амплитуде \mathcal{E} : $E = (\frac{1}{2}g\tau_s/n_a)^{1/2}\mathcal{E}$. Время t в уравнениях (1) нормировано на время жизни фотона τ_{ph} . Заметим, что типичное значение «обезразмеренного» времени релаксации инверсии $T = \tau_s/\tau_{ph}$ по порядку величины равно 1000. В принятых обозначениях интенсивность поля выражается через поток фотонов с энергией $h\nu$ через единичную площадку: $2E^2/(g\tau_s)$.

При стационарной генерации $E = E_{st}\exp(i\beta t)$, где β – малая отстройка частоты света от собственной частоты резонатора, образованного гранями активного кристалла. Значения величин β и E_{st} определяются выражениями: $\beta = M\sqrt{1 + R^2}\sin(\beta\tau_d - \kappa + \arctan(R^{-1}))$, $E_{st}^2 = (P - N_{st})/(1 + 2N_{st})$, $N_{st} = M\sin(\kappa - \beta\tau_d)$.

Для дальнейшего анализа представим поле в следующем виде: $E = E_0\exp[i\beta t + \psi(t)]$, где E_0 – нормировочный множитель ($|E|^2 = E_0^2$), а функция ψ (в общем случае комплексная) определяет нелинейную динамику поля.

Наличие члена с запаздывающим аргументом в (1) приводит к невозможности использования традиционных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Для упрощения последующих выкладок полезно ввести функцию, пропорциональную запаздывающему сигналу обратной связи:

$$\Lambda(t) = M\exp(i\kappa)\frac{E(t - t_d)}{E(t)} = M\exp[-i\chi + \psi(t - \tau_d) - \psi(t)], \quad (2)$$

где $\chi \equiv \beta\tau_d - \kappa$ – набег фазы в петле ОС при стационарной генерации. Для регулярных осцилляций функция $\Lambda(t)$ также периодична и описывает эффект ЗОС. При этом средние по периоду инверсия населенностей и частота отстройки могут быть выражены через средние значения действительной и мнимой частей новой функции:

$$\bar{N} = \text{Im } \bar{\Lambda}, \quad \beta = \text{Re } \bar{\Lambda} - R \text{Im } \bar{\Lambda}. \quad (3)$$

Здесь $\bar{\Lambda}$ – среднее значение функции (2) на одном периоде колебаний. В новых обозначениях уравнения (1) для функций ψ и $n = N - \bar{N}$ сводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\psi &= (1 - iR)n + i[\Lambda(t) - \bar{\Lambda}], \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{n}{T_1} - \frac{\omega_r^2}{2}[\exp(2\text{Re } \psi) - 1]\left(1 + \frac{2n}{1 + 2\bar{N}}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Во втором уравнении (4) введены два параметра: $\omega_r^2 = 2(P - \bar{N})/T$ и $T_1 = T(1 + 2\bar{N})/(1 + 2P)$, первый из которых (ω_r) – частота релаксационных осцилляций, а второй

(T_1) по порядку величины равен времени релаксации инверсии. Заметим, что для диодных лазеров обычно справедливо условие: $\omega_r T \gg 1$. В наших расчетах были выбраны значения $P = 0.8$, $T = 1000$ и $M = 0.02$. При этом безразмерная частота $\omega_r = 0.04$. Среднее значение безразмерной инверсии \bar{N} близко к N_{st} (т.е. порядка M), частота колебаний инверсии близка к ω_r , и их амплитуда $|n|$ также порядка ω_r . Отсюда следует, что $|n| \ll 1 + 2\bar{N}$. В дальнейшем анализе использовано приближение $1 + 2n/(1 + 2\bar{N}) \approx 1$, выполнимость которого была проверена численными расчетами периодических режимов.

3. Подход к нахождению импульсно-периодических решений

Интерференция запаздывающего сигнала, поступающего в активную среду после отражения от внешнего зеркала, с полем, циркулирующим внутри кристалла, приводит к связи между полями, излученными в разные моменты времени. Полная эволюция поля, определяемая уравнениями ЛК [1], находится однозначно, если только поле и инверсия населенностей заданы на интервале времени обхода внешнего резонатора, что требует использования множества данных непрерывной мощности. Тем не менее, среди возможных решений уравнений ЛК имеется класс решений, соответствующих выходу на периодический аттрактор для множества начальных условий [6, 9]. Нашей целью является нахождение строго периодического решения. В таком режиме динамика поля и инверсии может быть описана с помощью одной периодической функции Φ . Наличие строго периодических устойчивых решений при определенных параметрах системы подтверждается численными расчетами, выполненными в ряде работ [см., напр., 6, 10].

Регулярные подходы к общему анализу нелинейных дифференциальных уравнений при наличии членов с запаздывающим аргументом отсутствуют. В случае линейных уравнений при наличии членов с запаздывающим аргументом обычно используется разложение искомого решения в ряд по экспоненциальным функциям времени [11]. Показатели экспонент находятся путем решения трансцендентных уравнений.

Требование строгой периодичности искомого решения резко снижает сложность задачи, что позволяет сформулировать полуаналитический подход к ее анализу. Одно из существенных упрощений задачи связано с тем, что для периодических режимов член $\Lambda(t)$, соответствующий запаздывающей обратной связи, также периодичен. В этом случае функция (2), входящая в уравнение (4), может быть представлена в виде степенного ряда по искомому периодическому решению. Чтобы найти коэффициенты ряда в разложении члена обратной связи по степеням искомого решения, мы воспользуемся следующими дополнительными соображениями: 1) малое тангенциальное возмущение решения, соответствующее малому сдвигу вдоль предельного цикла, очевидно, пропорционально первой производной по времени от искомого решения; 2) для строго периодического решения выбор начала отсчета времени произволен. Оба эти соображения справедливы при условии, что импульсно-периодический режим генерации устойчив. Стабильность искомого решения по отношению к малым возмущениям устанавливается посредством численных расчетов и не является предметом аналитического подхода.

Первое соотношение позволяет вывести дополнительное соотношение путем нахождения связи между амплитудой малых тангенциальных возмущений и искомым периодическим решением. Накладывая условие пропорциональности этого возмущения производной от искомого решения, находим требуемое соотношение. Система линейных уравнений для произвольных малых возмущений приведена в Приложении. Эта система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с коэффициентами, периодически зависящими от времени через искомую функцию. Матрица коэффициентов связи \mathbf{A} имеет три собственных числа: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}T_1 \pm i\omega_r \exp(\text{Re}\psi)$ (заметим, что $\exp(\text{Re}\psi) = |E|/E_0$). Из общих соображений следует, что тангенциальное возмущение соответствует комбинации собственных векторов с собственным числом, реальная часть которого равна нулю. Эта комбинация может быть найдена в явном виде при условии $\omega_r T_1 \gg 1$, которое обычно выполняется. Временная зависимость тангенциального возмущения определяется лишь величиной $\exp(\text{Re}\psi) = |E|/E_0$. Поскольку малое возмущение пропорционально производной искомой функции Φ , то ее с точностью до константы можно определить как $d\Phi/dt = |E|/E_0$. Определенная таким образом функция имеет размерность времени. Для выкладок удобно ввести безразмерную функцию $\Theta = \omega\Phi$, где ω – подлежащая определенной характерная частота, близкая по порядку величины к частоте релаксационных колебаний ω_r :

$$\Theta(\tau) - \Theta(t) = \omega[\Phi(\tau) - \Phi(t)] = \omega \int_t^\tau dt' (|E|/E_0). \quad (5)$$

Искомая функция характеризует скорость эволюции системы во времени, и эта скорость пропорциональна амплитуде поля, а не ее интенсивности, в отличие от скорости изменения инверсии на лазерном переходе (см. (1)). Период решения определяется ростом $\Theta = \omega\Phi$, как функции верхнего предела, на величину 2π . Поскольку отношение $|E|/E_0$ всегда положительно, то отсюда следует, что

$$\int_t^{t+2\pi/\Omega} dt' (|E|/E_0) = 2\pi/\omega = \int_t^{t+2\pi/\Omega} \frac{d\Phi}{dt'} dt',$$

где период повторения импульсов выражен через частоту как $2\pi/\Omega$. Здесь учтено, что для строго периодической функции выбор начала отсчета времени произволен.

Периодическая функция $\Lambda(t)$, связанная с воздействием ЗОС (см. (2)), может быть представлена в виде ряда по степеням функции $\exp(i\Theta)$:

$$\Lambda(t) - \bar{\Lambda} = M \exp(ik) \frac{E(t - t_d)}{E(t)} - \bar{\Lambda} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \exp(ik\Theta), \quad (6)$$

где k – целое число. Набор констант h_k играет роль спектра ЗОС в данном представлении. Такой ряд является естественным обобщением ряда Фурье. Для величины $k\Theta$ будем использовать термин «гармоника k -го порядка». Условие пропорциональности малых тангенциальных возмущений производным от соответствующих нелинейных функций ($\delta\psi \propto \dot{\psi}$, $\delta\Phi \propto \dot{\Phi}$ и $\text{Re}\psi = \ln \dot{\Phi}$) позволяет вывести (см. Приложение) ключевое нелинейное уравнение для функции Φ :

$$d\Phi/dt = s_0 + 2 \text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} s_k \exp(ik\omega\Phi), \quad (7)$$

где коэффициенты ряда могут быть выражены через коэффициенты h_k (6):

$$s_{k \neq 0} = \frac{h_k - h_{-k}^*}{2} \frac{\omega k}{\omega^2 k^2 - \omega_r^2} = s_{-k}^*. \quad (8)$$

Стоит отметить, что уравнение (7) может быть проинтерпретировано как первый интеграл уравнения движения классического нелинейного маятника. Для нахождения s_0 используем точное (согласно определению) соотношение $|E|^2 = E_0^2$ (здесь и далее черта сверху означает усреднение по периоду пульсаций), позволяющее вывести из уравнения (7) дополнительное соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta \left[s_0 + \sum_{k \neq 0} s_k \exp(ik\Theta) \right]^{-1} = \frac{1}{\Phi} = s_0. \quad (9)$$

Величина s_0 определяет отклонение характерной частоты ω от частоты повторения импульсов: $\omega = \Omega s_0$.

Коэффициенты ряда s_k в уравнении (7) определяются явным образом формулой (8) через коэффициенты разложения h_k для функции $\Lambda(t) - \bar{\Lambda}$.

Оба ряда в выражениях (6) и (7) представляют собой разложения по базису функций $P_k = \exp[ik\omega\Phi(t)]$. Система этих функций полна как степенной ряд, однако они неортогональны на периоде осцилляций $2\pi/\Omega$. В этом случае коэффициенты разложения некоторой функции по неортогональному базису зависят также от интегралов перекрытия функций базиса, вследствие чего для нахождения коэффициентов рядов (6) и (7) потребуется знать полную матрицу \mathbf{P} , составленную из интегралов перекрытия функций базиса $\Pi_{mk} = \langle P_m | P_k \rangle$ (здесь угловые скобки обозначают среднее произведения функций базиса P_m^* и P_k по периоду осцилляций):

$$\Pi_{mk} = f_{k-m} = (\Omega/2\pi) \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} dt \exp[i\omega(k-m)\Phi(t)] = f_{m-k}^*. \quad (10)$$

Как видно из (10), матричные элементы $\Pi_{mk} = f_{k-m}$ зависят от разности индексов, т.е. эта матрица относится к классу матриц Тейлица, для которых обратная матрица находится в явном виде [12]. Обратная матрица также является матрицей Тейлица: $(\Pi^{-1})_{nm} = b_{n-m}$. Элементы обратной матрицы могут быть выражены через коэффициенты s_k разложения в ряд функции $d\Phi/dt$ следующим образом. Умножая обе стороны уравнения (7) на функцию P_{-n} и усредняя по периоду колебаний, получаем уравнение

$$(\omega/\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k f_{k-n} = \delta_{0n}, \quad (11)$$

из которого следует, что $b_{n-m} = (\omega/\Omega) s_{n-m}$ (δ_{nm} в (11) – единичная матрица).

Согласно определению (6), числа h_k – это коэффициенты разложения периодической функции $\Lambda(t) - \bar{\Lambda}$ по выбранному базису. Неортогональность функций базиса приводит к необходимости решить следующую систему уравнений [13]:

$$\langle P_m | (\Lambda(t) - \bar{\Lambda}) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \langle P_m | P_k \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_{mk} h_k,$$

где интегралы перекрытия функций базиса определяют матрицу $\Pi_{mk} = \langle P_m | P_k \rangle$. Решение этой системы для коэффициентов h_n находим с помощью обратной матрицы $\mathbf{\Pi}^{-1}$:

$$h_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Pi^{-1})_{nm} \langle P_m | (\Lambda(t) - \bar{\Lambda}) \rangle.$$

Сумму по m в этом решении можно свести к простому выражению:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Pi^{-1})_{nm} \langle P_m | = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\omega/\Omega) s_{n-m} \exp(-im\omega\Phi) = \frac{\omega}{\Omega} \dot{\Phi} \exp(-in\omega\Phi).$$

В итоге коэффициенты h_n определяются интегралом по периоду осцилляций $2\pi/\Omega$:

$$h_n = \left\langle \frac{\omega}{\Omega} \dot{\Phi} P_n | (\Lambda(t) - \bar{\Lambda}) \right\rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} dt \dot{\Phi} \exp(-in\omega\Phi) (\Lambda(t) - \bar{\Lambda}). \quad (12)$$

Стоящая под знаком интеграла функция $\dot{\Phi}$ по определению связана с амплитудой поля: $d\Phi/dt = |E|/E_0 = \exp(\text{Re}\psi)$. Функция ОС, согласно (2), также связана с $E(t)$, взятой в два разных момента времени: $\Lambda(t) = M \exp(ik) E(t - t_d)/E(t)$. Таким образом, функции Φ , ψ и Λ связаны друг с другом. Используя уравнение (П3) (см. Приложение), можно вывести следующее выражение для функции ψ :

$$\psi(t) = \int dt \left\{ \frac{\dot{\Phi}}{\Phi} (1 - iR) + i [\text{Re}(\Lambda(t) - \bar{\Lambda}) - R \text{Im}(\Lambda(t) - \bar{\Lambda})] \right\}. \quad (13)$$

Дальнейшие преобразования уравнений (13) и (3) позволяют получить следующее интегрофункциональное уравнение:

$$\ln(\Lambda(\tau)) = \ln M + ik + (1 - iR) \ln \frac{\dot{\Phi}(\tau - \tau_d)}{\dot{\Phi}(\tau)} + i \int_{\tau}^{\tau - \tau_d} dt \{ \text{Re} \Lambda(t) - R \text{Im} \Lambda(t) \}. \quad (14)$$

Фаза коэффициента ОС k входит в это уравнение, что указывает на ее существенное влияние на форму периодических осцилляций поля. Совместное решение уравнений (7) и (14) позволяет определить форму импульса при заданных значениях физических параметров лазера. Функции $\dot{\Phi}(\omega, \mathbf{h}; \tau)$ и $\Lambda(\omega, \mathbf{h}; \tau)$ вычисляются в явном виде через характерную частоту ω и коэффициенты h_k (\mathbf{h} – вектор, составленный из этих коэффициентов). При численном решении уравнения (14) подстановка в него функций $\dot{\Phi}(\omega, \mathbf{h}; \tau)$ и $\Lambda(\omega, \mathbf{h}; \tau)$ приводит к системе трансцендентных алгебраических уравнений относительно неизвестных ω, \mathbf{h} для дискретной сетки времени с заданным шагом $\tau_i - \tau_{i-1}$ на одном периоде повторения импульса. Время запаздывания и коэффициент ОС являются физическими параметрами. В описанной постановке задачи возникает возможность исследования режимов мультистабильности, тогда как при подходе, основанном на прямом интегрировании уравнений ЛК, проблема обнаружения таких режимов остается открытой.

4. Решения, имеющие вид одиночного импульса на периоде

В работе [2] было указано, что ключевым параметром, определяющим потерю устойчивости стационарного режима, является комбинация параметров $f = M\tau_d \sqrt{1 + R^2}$, в которой f называют эффективной силой обратной связи. Численные расчеты показали, что неустойчивость возникает, когда f порядка единицы. При этом фаза ОС и уровень накачки также влияют на устойчивость стационарного режима.

Представляет интерес проанализировать простейший случай, когда в правой части уравнения (7) только два члена: константа s_0 и первая ($k = 1$) гармоника. Динамика поля в этом случае характеризуется тремя константами: ω, s_0 и E_0 . Чтобы найти связь введенных констант с физическими параметрами (уровень накачки, фаза и модуль ОС, а также время запаздывания сигнала), необходимо решить интегральное уравнение (14). На данном этапе такая задача не ставилась. Вместо этого проводилось сопоставление численного и аналитического решений, в котором константы подбирались путем подгонки под численное решение. Уравнение (7) в этом случае имеет вид

$$\dot{\Phi} - S \cos(\omega\Phi) = s_0. \quad (15)$$

Функцию $\cos(\omega\Phi)$ удастся найти в явном виде:

$$\cos(\omega\Phi) = \frac{\cos(\Omega t) - S/s_0}{1 - (S/s_0) \cos(\Omega t)}. \quad (16)$$

Частота повторения импульсов также выражается в явном виде: $\Omega = \omega \sqrt{s_0^2 - S^2}$. С другой стороны, как было показано выше, справедливо соотношение $\Omega = \omega/s_0$. Отсюда следует, что s_0 и S/s_0 связаны между собой как

$$s_0^4 = 1 - (S/s_0)^2.$$

Как видно из (16), именно величина s_0 определяет форму импульса.

Легко показать, что смена знака коэффициента S соответствует сдвигу кривой на полпериода. Модуль амплитуды поля (функция $f_4(t)$ в табл.1)

$$|E(t)| = E_0 \dot{\Phi} = \frac{E_0}{\sqrt[4]{1 - (S/s_0)^2}} \times \left\{ 1 + (S/s_0) \frac{\cos[\sqrt[4]{1 - (S/s_0)^2} \omega t] - S/s_0}{1 - (S/s_0) \cos[\sqrt[4]{1 - (S/s_0)^2} \omega t]} \right\}. \quad (17)$$

Отношение максимума поля к минимуму равно $(1 + S/s_0)/(1 - S/s_0)$. Изменение фазы ОС приводит к незначительному изменению характерной частоты $\omega = (1.11 - 1.23)\omega_r$ и характерной амплитуды $E_0 = (0.96 - 0.99)\sqrt{P}$. Два этих параметра $\omega \approx \omega_r = \sqrt{2(P - N)/T}$ и $E_0 = \sqrt{(P - N)/(1 + 2N)}$ определяются в первую очередь превышением мощности накачки над порогом P . Их неявная зависимость от вариации параметра S/s_0 слабая. Однако от числа S/s_0 сильно зависит частота повторения осцилляций (через фактор $s_0^{-1} = \sqrt[4]{1 - (S/s_0)^2}$) и амплитуда импульса. Когда $|S/s_0| \rightarrow 1$, происходит рост амплитуды колебаний и увеличение периода колебаний. С физической точки зрения, чтобы колебания имели высокий пик, необходимо аккумулировать боль-

ше энергии накачки, что приводит к росту периода колебаний при заданном превышении над порогом накачки.

Чтобы выяснить применимость найденных частных решений к описанию установившихся осцилляций в модели ЛК, было выполнено численное интегрирование уравнений ЛК для параметров системы, соответствующих переходу через точку бифуркации с жестким возбуждением колебаний [14].

На рис.2 сплошными линиями с маркерами показаны три варианта численных решений системы уравнений (1) в режиме установившихся периодических импульсов излучения, включая случай, когда фаза ОС $\kappa = 180^\circ$, при которой колебания приобретают характер периодических солитонов [15]. Параметры лазерной системы, для которых выполнялись расчеты: $P = 0.8$, $M = 0.02$, $T = 1000$, $\tau_d = 10$, $R = 3$; при этом параметр эффективной силы ОС $f = 0.63$. В общем случае фаза κ определяется положением внешнего зеркала и частотой генерируемого излучения. В расчетах взяты значения $\kappa = 60^\circ$, 90° и 180° . Вблизи $\kappa = 60^\circ$ при выбранных параметрах происходит бифуркация с жестким возбуждением импульсно-периодического режима. Форма колебаний при таком κ заметно отличается от гармонической, а амплитуда осцилляций не мала. С увеличением κ до 90° и выше происходит обострение импульса. Аналитическое решение уравнения (15) показано для $\kappa = 90^\circ$ штриховой линией. Как видно из рис.2, различие между численным и аналитическим решениями незначительно.

Поскольку связь параметров аналитического решения E_0 , ω и s_0 с физическими параметрами лазера не удается выразить в явном виде, то их значения определялись подгонкой аналитического решения к численному решению, найденному методом прямого интегрирования уравнений ЛК. Для каждого набора физических параметров существует соответствующий им набор констант в уравнении (15). Эти константы можно найти, когда при численном расчете установится импульсно-периодический режим генерации. Для установившегося режима методом нелинейной подгонки определяются параметры E_0 , ω и S/s_0 , а также начало отсчета времени. Процедура сходится, когда достигается минимум ошибки (среднеквадратичное отклонение) от расчетных данных на периоде функции (17). Величина невязки – достигнутый при подгонке минимум среднеквадратичного отклонения χ^2_{red} .

Результаты подгонки приведены в табл.1 (формула (17) соответствует функции $f_4(t)$). Рассмотрены три значе-

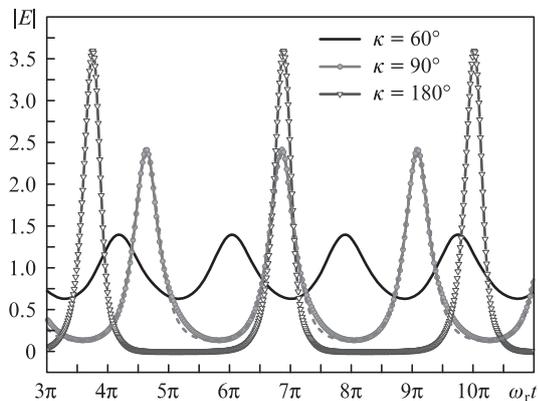


Рис.2. Установившиеся осцилляции волнового поля. Сплошные линии – результаты численных расчетов для эффективной силы ОС $f = 0.63$ при фазах $\kappa = 60^\circ$, 90° и 180° . Штриховая линия – аналитическое решение для $\kappa = 90^\circ$.

Табл.1. Коэффициенты для аналитических формул (17), (18), восстановленные из данных расчета при $\kappa = 60^\circ$, 90° и 180° (частота колебаний $\omega_\tau = 0.04$, мощность накачки $P = 0.8$).

κ	$\sqrt{\chi^2_{\text{red}}/y^2}$	χ^2_{red}	$A = s_0 E_0 / \sqrt{P}$	$-S/s_0$	V	Ω/ω_τ
$f_4(t); V = -S/s_0, p = 4$						
60°	1.1%	5.6 E-5	1		0.375	1.075
90°	6%	1.85 E-3	1.33		0.84	0.90
180°	12.8%	8.14 E-3	1.91		0.963	0.64
$f_5(t); V \neq -S/s_0, p = 5$						
60°	1.0%	5.2 E-5	1		0.376	0.356 1.075
90°	3.4%	5.7 E-4	1.26		0.887	0.80 0.90
180°	8.6%	3.7 E-3	1.84		1	0.958 0.65

ния фазы ОС κ (60° , 90° и 180°), с ростом κ амплитуда осцилляций быстро растет. Тем не менее, форма импульса хорошо совпадает с формой, описываемой функцией (17) во всех случаях. Мерой качества аппроксимации может служить среднеквадратичное отклонение аппроксимирующей функции от точного значения $\chi^2_{\text{red}} = (n-p)^{-1} \times \sum_1^n [y_i - f(x_i)]^2$. Из-за ограниченного числа точек n в наборе данных используется критерий, называемый «приведенный χ^2 » [16]. В нем деление на n заменено на уменьшенный делитель $n-p$, где p – число параметров подгонки (в нашем случае $p = 4$). Параметр χ^2_{red} приведен в третьей колонке табл.1. Интегральная относительная ошибка записывается как $\sqrt{\chi^2_{\text{red}}/y^2}$, где $y^2 = n^{-1} \sum_1^n y_i^2$. При $\kappa = 90^\circ$ относительная ошибка не превосходит 6% ($p = 4$). Как видно, качество аппроксимации очень хорошее.

Удастся найти еще одно аналитическое решение для случая, когда члены ряда в (7) образуют бесконечный ряд по степеням $\cos^k(\omega\Phi)$ с коэффициентами, спадающими как z^k , где z – константа меньше единицы. Примечательно, что в этом случае структура решения сохраняется:

$$f_5(t) = E_0 s_0 \left[1 + \frac{(S/s_0) \cos(\Omega t) + V}{1 + V \cos(\Omega t)} \right]. \quad (18)$$

Здесь, в отличие от формулы (17), вместо числа $-S/s_0$ в дробном выражении используется дополнительный параметр V .

Коэффициенты аналитического решения, представленного в виде функции $f_5(t)$, сложным образом зависят от физических параметров системы, таких как фаза ОС, однако могут быть извлечены непосредственно из численного решения, если формула (18) действительно соответствует решению. Значения этих коэффициентов при различных κ и прочих фиксированных параметрах приведены в табл.1. Использование формулы $f_5(t)$ приводит к уточнению формы импульса как функции времени, что подтверждает сходимость аналитического решения к численному с ростом числа используемых старших гармоник.

Изменение фазы ОС в диапазоне $60^\circ < \kappa < 220^\circ$ приводит к сильному изменению амплитуды импульса и его частоты повторения, которое хорошо описывается аналитически во всем диапазоне значений κ , соответствующем импульсно-периодическому режиму. На рис.3 приведен увеличенный фрагмент рис.2, демонстрирующий форму импульса для $\kappa = 90^\circ$, из которого хорошо видно, что кривые, полученные численно и аналитически, хорошо согласуются между собой. Небольшие различия связаны с нарушением симметрии для расчетной кривой из-за конечности времени релаксации инверсии. Аналитическая

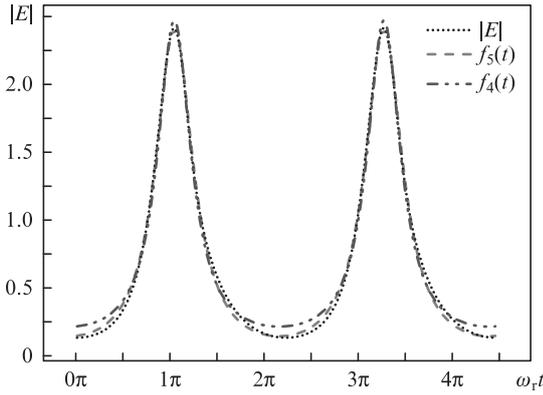


Рис.3. Теоретические (f_3, f_4) и расчетная (пунктир) формы импульса при $\kappa = 90^\circ$ (f_3 – функция (18) для фитинга с пятью подгоночными параметрами; подгоночная функция f_4 задается формулой (17)).

форма импульса (штриховая кривая на рис.2) симметрична относительно максимума и минимума функции. Фаза $\kappa = 90^\circ$ соответствует колебаниям с большой амплитудой и заметным обострением формы. Отметим, что стандартная теория малых возмущений применима только вблизи бифуркации Андронова–Хопфа для гармонических колебаний малой амплитуды. Наш подход позволяет анализировать также режимы с обострением импульса и большой амплитудой колебаний.

5. Заключение

В рамках стандартной модели Лэнга–Кобаяши для полупроводникового лазера с ЗОС предложен метод теоретического анализа установившегося импульсно-периодического режима генерации такого лазера. Динамика генерации лазера с ЗОС отличается богатством наблюдаемых режимов, среди которых выделяются режимы с регулярными периодическими пульсациями, представляющие практический интерес. Предложенный подход позволяет свести описание периодических режимов генерации лазера с ЗОС к анализу нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, содержащего бесконечный степенной ряд разложения по искомым периодическим функциям. Найдено аналитическое решение для случая, когда бесконечный ряд может быть сведен к сумме первых членов разложения. Для сравнения с численными результатами выбраны параметры лазера вблизи точки бифуркации, отличающейся от бифуркации Андронова–Хопфа тем, что при переходе через нее происходит жесткое возбуждение ангармонических колебаний. Дальнейший уход за точку бифуркации приводит к еще большему обострению формы импульса. Показано, что, несмотря на обострение формы импульса, аналитическое решение хорошо согласуется с численным расчетом. Аналитическое решение дает связь между характеристиками импульса – периодом повторения пульсаций и их амплитудой в широкой области параметров.

Таким образом, для лазера с запаздывающей обратной связью построена аналитическая теория и найдены удобные выражения, описывающие периодические режимы генерации и предсказывающие форму импульсов. Развитый подход применим для изучения установившихся импульсно-периодических режимов генерации лазера, соответствующих движению в фазовом пространстве по предельным циклам.

Приложение. Вывод формулы (7)

Система линейных уравнений для возмущений находится путем подстановки $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$, $n \rightarrow n + \delta n$ (где $\delta\psi$ и δn – малые возмущения) в уравнения (4). Для установившихся периодических колебаний малые возмущения вдоль предельного цикла соответствуют продолжению движения по предельному циклу. Коэффициенты в системе линейных дифференциальных уравнений для возмущений являются чисто периодическими функциями, включая член с ЗОС. Систему уравнений для малых возмущений представим в матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \delta\mathbf{b}, \text{ где } \mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} \delta\psi(\tau) \\ \delta\psi^*(\tau) \\ \delta n(\tau) \end{pmatrix}. \tag{П1}$$

Матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{b} записываются как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - iR \\ 0 & 0 & 1 + iR \\ -(\omega_r^2/2)e^{2Re\psi} & -(\omega_r^2/2)e^{2Re\psi} & -1/T \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} i(\Lambda(t) - \bar{\Lambda}) \\ -i(\Lambda(t) - \bar{\Lambda})^* \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{П2}$$

Компоненты вектора \mathbf{b} выражаются через функцию $\Lambda(t)$ (6), вариация $\delta\Lambda(t)$, записанная через разложение Фурье (6) по гармоникам, пропорциональна возмущению фазы $\delta\Phi$.

Матрица \mathbf{A} имеет три собственных вектора $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 - iR \\ 1 + iR \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix}$$

с собственными числами: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}T_1 \pm i\omega_r \exp(Re\psi)$. Корни $\lambda_{1,2}$ соответствуют колебаниям с малым затуханием. Установившиеся колебания определяются как частное решение уравнений (П1) методом вариации констант решения однородной системы с матрицей \mathbf{A} :

$$\mathbf{v}(\tau) = \int_t^\tau dt \{K(\tau, t)\delta\mathbf{b}(t)\}.$$

Здесь $K(\tau, t) = U(\tau)U^{-1}(t)$ – матрица Коши, матрица U – это резольвента \mathbf{A} :

$$U(t) = E + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t)dt + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t)dt \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t)dt + \dots$$

Свертка по t выполняется в ε -окрестности точки τ с вектором $\delta\mathbf{b}$. Наличие затухания релаксационных колебаний приводит к независимости осциллирующих решений от значения времени на нижнем пределе, соответствующего моменту времени в далеком прошлом. Фактически, динамика установившихся колебаний не зависит от предыстории. Все определяется только малой окрестностью точки τ , где вектор $\delta\mathbf{b}$ можно разложить по собственным векторам матрицы \mathbf{A} , причем действие ядра в пределе $t \rightarrow \tau$ подчиняется правилу

$$K(\tau, t)\mathbf{v}_i = \exp\left(\int_t^\tau \lambda_i dt\right)\mathbf{v}_i.$$

Комбинация векторов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ при условии $\omega_r T_1 \gg 1$ позволяет исключить одно из уравнений (для инверсии

$\delta n(\tau)$ [10], осциллирующие функции для вариаций $\delta\psi(\tau)$ и $\delta\psi^*(\tau)$ являются решением уравнений

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\psi(\tau) \\ \delta\psi^*(\tau) \end{pmatrix} &= \int^{\tau} dt \delta\Phi \\ &\times \left[q_+(t) \begin{pmatrix} 1 - iR \\ 1 + iR \end{pmatrix} \cos(\omega_r \Phi(\tau) - \omega_r \Phi(t)) + q_-(t) \begin{pmatrix} +i \\ -i \end{pmatrix} \right], \quad (\text{П3}) \\ q_+(t) &= -\frac{d(\Lambda - \Lambda^*)/2i}{d\Phi}, \quad q_-(t) = Rq_+(t) + \frac{d(\Lambda + \Lambda^*)/2}{d\Phi}. \end{aligned}$$

Суммирование уравнений для $\delta\psi(\tau)$ и $\delta\psi^*(\tau)$ (П3) приводит к уравнению для функции $\delta\text{Re}\psi(\tau)$; с помощью соотношения $\delta\text{Re}\psi = \delta\ln\dot{\Phi}$ левая часть уравнения сводится к функции $\dot{\Phi}$. Сами тангенциальные возмущения пропорциональны производным функций: $\delta\psi \propto \dot{\psi}$ и $\delta\Phi \propto \dot{\Phi}$, замена в интеграле (П3) $\delta\Phi \rightarrow d\Phi$ позволяет вычислить интеграл аналитически. После несложных выкладок уравнение (П3) для линейных возмущений преобразуется к нелинейному дифференциальному уравнению для самой функции $\dot{\Phi}$:

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} + \sum_k \frac{(k\omega)^2}{(k\omega)^2 - \omega_r^2} \frac{h_k - h_{-k}^*}{2i} \exp(ik\omega\Phi) = 0. \quad (\text{П4})$$

Интегрируя уравнение (П4), приходим к выражению (7).

1. Lang R., Kobayashi K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 347 (1980).
2. *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics. AIP Conference Proceedings*. В. Krauskopf and D. Lenstra (eds.) (Melville, New York, 2000, Vol. 548).
3. Donati S., Hwang S.K. *Progress Quantum Electron.*, **36**, 293 (2012).
4. Behnia S., Mabhouti Kh., Jafari A., Akhshani A. *Optik* (Elsevier), **123**, 1555 (2012).
5. Napartovich A.P., Sukharev A.G. Symmetry in the equations of nonlinear dynamics of semiconductor laser subject to delayed optical feedback. *arXiv.org, arXiv:1110.0998v1* (2011).
6. Напартович А.П., Сухарев А.Г. *Квантовая электроника*, **34** (7), 630 (2004).
7. Rahman L., Winful H.G. *IEEE J. Quantum Electron.*, **30** (6), 1405 (1994).
8. Agrawal G.P., Dutta N.K. *Long-Wavelength Semiconductor Laser* (New York: Von Nostrand Rienhold, 1986).
9. Green K. *Phys. Rev. E*, **79**, 036210 (2009).
10. Напартович А.П., Сухарев А.Г. *Квантовая электроника*, **41** (3), 212 (2011).
11. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* (М.: Наука, 1971).
12. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ* (М.: Мир, 1989).
13. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (М.: Наука, 1988).
14. Напартович А.П., Сухарев А.Г. *Квантовая электроника*, **38** (10), 927 (2008).
15. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980).
16. Bevington R.P., Robinson D.K. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* (New York: McGraw-Hill Book Co, 1969).