

# Зависимость ошибки компенсации от ошибок измерителя и корректора в адаптивной оптической системе фазового сопряжения

В.В.Кийко, В.И.Кислов, Е.Н.Офицеров

*В рамках статистической модели адаптивной оптической системы (АОС) фазового сопряжения в едином математическом подходе рассмотрены три алгоритма, каждый из которых минимизирует один из следующих показателей: ошибку измерителя (при идеальном корректоре), ошибку корректора (при идеальных измерениях), ошибку компенсации (с учетом дискретности и шумов измерений, неполноты системы функций отклика актюаторов корректора). Исследованы функциональные и статистические связи между алгоритмами и получено соотношение, которое позволяет с погрешностью не более 10% рассчитать среднеквадратичную ошибку компенсации как функцию ошибок измерителя и корректора. Поскольку при согласовании параметров АОС целесообразно исходить из равенства ошибок измерителя и корректора, то в случае, когда в качестве измерителя волнового фронта используется датчик Гартмана, в отсутствие шумовой составляющей в ошибке измерителя требуемое число актюаторов оказывается меньше числа отсчетов в 1.5–2.5 раза, и это различие возрастает с ростом шумов измерений.*

**Ключевые слова:** адаптивная оптическая система, фазовое сопряжение, деформируемое зеркало, алгоритм управления, ошибка измерителя, ошибка корректора, ошибка компенсации, согласование числа отсчетов с числом актюаторов.

## 1. Введение

Эффективность работы адаптивной оптической системы (АОС) фазового сопряжения существенно зависит от алгоритма управления, который с учетом показателя качества системы разрабатывается на стадии теоретических исследований. На основе алгоритма информация от измерителя волнового фронта (ВФ) преобразуется в воздействия, управляющие актюаторами корректора, и таким образом формируется корректирующее распределение фазы. Показатели качества функционирования АОС по ее целевому назначению условно можно разделить на две группы: показатели для информационных оптических систем и показатели для энергетических оптических систем. В информационных системах показателем качества, как правило, считается вероятность желаемого события (см., напр., [1–7]). В энергетических системах показателем качества функционирования обычно считаются ошибки аппроксимации ВФ или градиента ВФ (см., напр., [1, 2, 4, 7]), которые непосредственно связаны с интенсивностью излучения в фокусе оптической системы и углом расходимости формируемого пучка.

Настоящая работа является продолжением и развитием работы [8]. В [8] в рамках статистической модели АОС фазового сопряжения описаны три алгоритма, каждый из которых минимизирует величину одного из следующих (энергетических) показателей качества: ошибку I

измерителя ВФ, ошибку II корректора ВФ, ошибку III компенсации ВФ. Ошибка I измерителя ВФ обусловлена дискретностью и шумами измерений; она определяется с учетом параметров измерителя при идеальном корректоре, безошибочно воспроизводящем заданную функцию распределения любого вида. Ошибка II корректора ВФ вызвана тем, что измеряемое распределение фазы представляется в базисе функций отклика актюаторов, составляющих в общем случае неполную систему функций; эта ошибка находится с учетом параметров корректора при идеальном измерителе ВФ. Ошибки аппроксимации I и II в задаче формирования требуемого распределения фазы позволяют оценить предельные возможности АОС. При оптимизации параметров АОС (число каналов измерителя и корректора, быстродействие, динамический диапазон коррекции и др.), предназначенной для компенсации фазовых искажения поля, исходят из анализа ошибки III, учитывающей все указанные выше источники погрешностей одновременно.

В настоящей работе в математическую модель АОС [8] вводится матрица связи между измерителем ВФ и корректором. Это позволило в едином математическом подходе к описанию алгоритмов I, II, III исследовать функциональные и статистические связи между ними и соответствующими ошибками аппроксимации. Основная цель исследования – изучение функциональной зависимости ошибки компенсации от ошибок измерителя и корректора и обоснование возможности разработки согласованных по параметрам измерителя и корректора ВФ.

## 2. Основные расчетные соотношения

Целевые характеристики энергетической АОС не зависят, как правило, от среднего по выходной апертуре значения фазы. Поэтому в математических моделях АОС часто встречаются выражения, в которых из функции вычитается ее среднее значение. Обозначим операцию про-

**В.В.Кийко.** Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; e-mail: hkww@mail.ru

**В.И.Кислов, Е.Н.Офицеров.** Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: kislov-victor@mail.ru, oeuogeny@yandex.ru

Поступила в редакцию 23 июня 2014 г., после доработки – 22 декабря 2014 г.

странственного усреднения функции  $f(\rho)$  по переменной  $\rho$  ( $\rho = (x, y)$  – радиус-вектор точки на плоскости) угловыми скобками:

$$\langle f(\rho) \rangle = \frac{\int P(\rho)f(\rho) d\rho}{\int P(\rho) d\rho},$$

где  $P(\rho)$  – апертурная функция ( $P(\rho) = 1$  в пределах выходной световой апертуры АОС и  $P(\rho) = 0$  вне апертуры). Две функции, которые различаются на величину среднего значения одной из них, будем обозначать парными маленькой и большой буквами (одного алфавита и звучания); если в текст введена, например, функция  $f(\rho)$ , то  $F(\rho) = f(\rho) - \langle f(\rho) \rangle$ ; при этом  $\langle F(\rho) \rangle = 0$ .

Пусть функция  $\Phi(\rho)$  ( $\phi(\rho)$ ) описывает измеряемое (подлежащее восстановлению и/или коррекции) случайное распределение фазы с известной статистикой. Фактически сформированная АОС функция распределения фазы  $\Psi(\rho)$  ( $\psi(\rho)$ ) в общем случае отличается от функции  $\Phi(\rho)$  и имеет, как и  $\Phi(\rho)$ , стохастический характер. Алгоритм управления АОС должен приближать к нулю разность

$$\Delta(\rho) = \Phi(\rho) - \Psi(\rho). \quad (1)$$

Показателем качества работы АОС будем считать среднее значение квадрата (дисперсию) фазовой ошибки (1):

$$\Delta^2 = \langle \overline{\Delta^2(\rho)} \rangle, \quad (2)$$

где черта сверху означает операцию статистического усреднения (по ансамблю). В задаче компенсации ВФ величина (2) непосредственно связана (при  $\Delta^2 < 1$ ) с числом Штреля  $I_S \approx \exp(-\Delta^2)$ , которое равно [9] относительному снижению интенсивности излучения в фокусе оптической системы.

Задачи расчета ошибок I, II, III схожи между собой. Во всех задачах присутствует текущая и/или априорная информация о фазовом распределении  $\Phi(\rho)$ . Также во всех задачах сформированная АОС функция распределения  $\Psi(\rho)$  представляется в базисе функций отклика корректора. При решении задачи I допустимо принять, что условно используемый корректор ВФ может точно реализовать заданные функции отклика любого вида. Поэтому результаты аналитического решения задач I, II, III удается привести к единой форме. Представим основные общие соотношения, полученные при оптимизации системы исходя из условия минимальности показателя (2), а затем конкретизируем содержание алгоритмов управления с учетом особенностей каждой из указанных задач.

Выражение для оптимальной функции  $\Psi(\rho)$  во всех задачах приводится к виду

$$\Psi(\rho) = MHR(\rho). \quad (3)$$

Здесь матрица  $M = \|M_m\|$  – строка (размерностью  $1 \times \mu$ ) отсчетов измерителя ВФ;  $\mu$  – число отсчетов; величины  $\{M_m\}$  имеют стохастический характер, поскольку функционально связаны с восстанавливаемым случайным распределением  $\Phi(\rho)$  и, кроме того, содержат в общем случае шумовую составляющую; функция-матрица  $R(\rho) = \|R_n(\rho)\|$  – столбец ( $\nu \times 1$ ) линейно независимых функций отклика  $R_n(\rho)$  ( $r_n(\rho)$ ) корректора;  $\nu$  – число актюаторов

корректора ВФ;  $H = \|H_{nm}\|$  – детерминированная матрица ( $\mu \times \nu$ ) связи между измерителем ВФ и корректором; величины  $\{H_{nm}\}$  зависят от функции-матрицы  $R(\rho)$ , автокорреляционных характеристик для  $\Phi(\rho)$  и  $M$ , корреляционной матрицы  $M\Phi(\rho)$ . Для каждой задачи (I, II, III) выражения для матрицы  $H$  приведены в Приложении 1.

Выражение (3) учитывает, что система управления АОС содержит в себе три основных устройства: измеритель (отсчеты  $M$ ), исполнительное устройство (корректор, функции отклика  $R(\rho)$ ) и устройство выработки управляющих воздействий (матрица  $H$ ), которое согласует данные измерителя с возможностями корректора.

Соотношение (3) предполагает линейность функции отклика  $\Psi(\rho)$  корректора ВФ относительно управляющих воздействий (свойство суперпозиции [1] функций отклика  $\{R_n(\rho)\}$  актюаторов). Соответственно

$$\Psi(\rho) = CR(\rho), \quad C = MH. \quad (4)$$

где  $C = \|C_n\|$  – матрица-строка ( $1 \times \nu$ ) управляющих воздействий;  $C_n$  – весовой коэффициент, с которым функция отклика  $n$ -го актюатора учитывается в распределении фазы.

В статистической модели АОС одна из важнейших характеристик случайной функции  $\Psi(\rho)$  – ее автокорреляционная функция  $K_\Psi(\rho_1, \rho_2)$ . Исходя из (4) имеем

$$K_\Psi(\rho_1, \rho_2) = \overline{\Psi(\rho_1)\Psi(\rho_2)} = R^T(\rho_1)\overline{CC}R(\rho_2), \quad (5)$$

где

$$\overline{CC} = \|\overline{C_n C_m}\| = H^T \overline{MM} H \quad (6)$$

– матрица ( $\nu \times \nu$ ) корреляции управляющих воздействий;  $\overline{MM} = \|\overline{M_n M_m}\|$  – матрица ( $\mu \times \mu$ ) корреляции отсчетов измерителя ВФ; верхний индекс  $T$  означает операцию транспонирования. Матрица  $\overline{MM}$  считается невырожденной. Если ранг исходной матрицы корреляции меньше числа отсчетов, то она заменяется подматрицей, формирующей базисный минор; соответственно изменяется и строка отсчетов [10].

Во всех задачах (I, II, III) минимизированная ошибка (дисперсия) аппроксимации (2) рассчитывается по формуле

$$\Delta^2 = \sigma_\Phi^2 - \sigma_\Psi^2. \quad (7)$$

Здесь  $\sigma_\Phi^2$  и  $\sigma_\Psi^2$  – дисперсии функций восстанавливаемого и сформированного АОС распределений фазы соответственно; с учетом (5) получаем

$$\sigma_\Phi^2 = \langle K_\Phi(\rho_1, \rho_2) \rangle, \quad \sigma_\Psi^2 = \langle K_\Psi(\rho_1, \rho_2) \rangle = \text{Sp}(\langle RR \rangle \overline{CC}), \quad (8)$$

где  $K_\Phi(\rho_1, \rho_2) = \overline{\Phi(\rho_1)\Phi(\rho_2)}$  – функция корреляции восстанавливаемого распределения фазы;  $\langle RR \rangle = \|\langle R_n(\rho)R_m(\rho) \rangle\|$  – матрица ( $\nu \times \nu$ ) связи функций отклика корректора;  $\text{Sp}(\dots)$  – операция вычисления следа матрицы [10]. Выражение (7) получено с учетом некоррелированности ошибки  $\Delta$  и функции  $\Psi$ , что показано далее (вторая формула в (15)).

Соотношения (4)–(8) относятся к зональному методу управления АОС. Однако в поисковых АОС с зональным управлением процесс оптимизации значения целевой функции осложнен тем, что функции отклика актюа-

торов пространственно связаны (в общем случае матрица связи  $\langle RR \rangle$  не диагональна). Неортогональность каналов управления приводит к появлению систематических ошибок и уменьшению отношения сигнал/шум. Указанные недостатки менее существенны в поисковых АОС с модальным управлением [1, 2]. Отметим, что использование модальных алгоритмов в беспойском режиме позволяет [2] в отдельных случаях сократить число вычислительных операций и, таким образом, увеличить быстродействие АОС.

Рассмотрим АОС с базисом из ортонормированных мод, воспроизводимых корректором ВФ безошибочно. В этом случае модовой отклик  $F_n(\rho)$  ( $f_n(\rho)$ ,  $n = 1, 2, \dots, v$ ) реализуется путем подачи соответствующих управляющих воздействий одновременно на каждый из  $v$  актюаторов. Тогда  $F(\rho) = AR(\rho)$ , где  $A = \|A_{nm}\|$  – матрица ( $v \times v$ ) перехода от базиса  $\{R_n(\rho)\}$  к базису  $\{F_n(\rho)\}$ . С учетом ортонормированности мод  $A\langle RR \rangle A^T = E$ , где  $E$  – единичная матрица. При этом  $\Psi(\rho) = \hat{C}F(\rho)$ , где  $\hat{C} = CA^{-1}$  – матрица управляющих модовых воздействий, а  $A^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $A$ . Каждая мода  $F_n(\rho)$  вносит вклад  $S_n^2 = \langle\langle K_\Psi(\rho_1, \rho_2) F_n(\rho_1) F_n(\rho_2) \rangle\rangle \geq 0$  в величину дисперсии сформированного распределения фазы:

$$\sigma_{\Psi}^2 = \text{Sp}(\hat{C}\hat{C}) = \sum_{n=1}^v S_n^2,$$

где  $\hat{C}\hat{C} = A^{-T}\hat{C}\hat{C}A^{-1}$  – матрица корреляции управляющих модовых воздействий;  $A^{-T} = (A^T)^{-1}$ .

Особый интерес представляют моды Карунена–Лозва [7, 10]. Они обладают отличительным свойством экстремальности. Пусть рассматриваются различные базисы с нумерацией мод в каждом из них исходя из условия  $S_n^2 \geq S_{n+1}^2$  ( $n = 1, 2, \dots, v-1$ ). Тогда дисперсия аппроксимации ВФ первыми  $k$  ( $1 \leq k \leq v$ ) модами Карунена–Лозва всегда не больше ошибки, получающейся при использовании других базисов с теми же  $v$  и  $k$ . Поэтому в АОС с модальным управлением целесообразно использовать базис Карунена–Лозва, что позволяет максимально быстро получить минимальную ошибку аппроксимации. С учетом [10] и результатов работ [8, 11] моды Карунена–Лозва находятся как решение матричного уравнения относительно величин  $A$  и  $S^2$  или из эквивалентного ему интегрального уравнения относительно  $F(\rho)$  и  $S^2$ :

$$A\langle RR \rangle \hat{C}\hat{C} = S^2 A, \quad \langle F(\rho_1) K_\Psi(\rho_1, \rho) \rangle = S^2 F(\rho). \quad (9)$$

Здесь  $S^2 = \|S_n^2 \delta_{nm}\|$ ;  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера; во втором соотношении усреднение проводится по переменной  $\rho_1$ ;  $K_\Psi$  и  $\hat{C}\hat{C}$  определены выражениями (5) и (6). Для полноты статистической модели АОС отметим следующее. Если измеритель и корректор ВФ идеальны, то моды Карунена–Лозва могут быть найдены из второго (интегрального) уравнения в (9) при  $K_\Psi = K_\Phi$ . В матричном уравнении в данном случае

$$\hat{C}\hat{C} = \langle RR \rangle^{-1} \| \langle K_\Phi(\rho_1, \rho_2) R_n(\rho_1) R_m(\rho_2) \rangle \| \langle RR \rangle^{-1}$$

и исходный базис  $\{R_n(\rho)\}$  должен составлять полную систему функций (к примеру, полиномы Цернике [9]).

Моды Карунена–Лозва позволяют аппроксимировать случайную функцию суммой пространственно ортого-

нальных функций со статистически независимыми коэффициентами. Соотношения (9) обобщают этот способ описания на задачи, в которых базис Карунена–Лозва формируется из набора (конечного или бесконечного) заданных функций. Методы решения уравнений (9) известны [10].

В рамках статистической модели АОС соотношения (1)–(9) дают общее описание алгоритмов оптимального формирования фазы. Для расчета характеристик АОС требуются три матрицы: функция-матрица откликов  $R(\rho)$  корректора ВФ, стохастическая матрица отсчетов  $M$  измерителя ВФ и детерминированная матрица связи  $H$  измерителя с корректором. С помощью этих матриц находятся все остальные матрицы, функции и величины, присутствующие в соотношениях (2)–(9). Выражения для производящих матриц  $R(\rho)$ ,  $M$  и  $H$  приведены в Приложении 1. Конкретное описание алгоритма управления АОС зависит от его назначения. Для задач I, II, III соответственно формулам (П1.4), (П1.6), (П1.7) имеем

$$R(\rho) = \| \overline{M_m \Phi(\rho)} \|, \quad M = \| M_m \|, \quad H = \overline{M M}^{-1}, \quad (10)$$

$$R(\rho) = \| R_n(\rho) \|, \quad M = \| \langle \Phi(\rho) R_n(\rho) \rangle \|, \quad H = \langle RR \rangle^{-1}, \quad (11)$$

$$R(\rho) = \| R_n(\rho) \|, \quad M = \| M_m \|, \quad (12)$$

$$H = \overline{M M}^{-1} \| \langle \overline{M_m \Phi(\rho)} R_n(\rho) \rangle \| \langle RR \rangle^{-1}.$$

Чтобы реализовать алгоритм (3), необходимо знать также статистические свойства функции  $\Phi(\rho)$  и отсчетов  $\{M_m\}$ , а также функцию их совместной корреляции. Эти характеристики могут быть определены экспериментально путем прямых измерений и/или исходя из априорной информации.

Изучим связь между алгоритмами. Чтобы различать алгоритмы I, II, III, переобозначим  $\Psi(\rho)$ ,  $\Delta(\rho)$ ,  $\sigma_{\Psi}^2$ ,  $\Delta^2$  с помощью индекса. Введем в рассмотрение функции  $\Psi_{\xi}(\rho)$ ,  $\Delta_{\xi}(\rho) = \Phi(\rho) - \Psi_{\xi}(\rho)$ ,  $\sigma_{\xi}^2 = \langle \Psi_{\xi}^2(\rho) \rangle$ ,  $\Delta_{\xi}^2 = \sigma_{\Phi}^2 - \sigma_{\xi}^2$ , где для задач I, II, III индекс  $\xi$  есть  $\mu$ ,  $v$ ,  $\mu v$  соответственно. Исследуем  $\Psi_{\xi}(\rho)$  как линейный по  $\Phi$  оператор  $\Psi_{\xi}(\Phi)$  (без учета функциональной зависимости отсчетов  $M$  от  $\Phi(\rho)$ ). Используя (3), с учетом выражений (10)–(12) и с помощью алгебраических и статистических преобразований находим

$$\Psi_{\xi}(\Psi_{\xi}(\Phi)) = \Psi_{\xi}(\Phi), \quad (13)$$

$$\Psi_{\mu v}(\Phi) = \Psi_{\mu}(\Psi_v(\Phi)) = \Psi_v(\Psi_{\mu}(\Phi)).$$

Второе соотношение в (13) показывает, что оптимальный алгоритм компенсации III учитывает и алгоритм I, и алгоритм II.

Рассмотрим связи между алгоритмами на уровне корреляционных соотношений. Из общих соображений понятно, что сформированное распределение  $\Psi_{\xi}(\rho)$  и ошибка  $\Delta_{\xi}(\rho)$  должны быть статистически независимы:

$$\langle \overline{\Delta_{\xi}(\rho) \Psi_{\xi}(\rho)} \rangle = 0, \quad \langle \overline{\Delta_{\xi}(\rho) \Phi(\rho)} \rangle = \Delta_{\xi}^2, \quad (14)$$

$$\langle \overline{\Psi_{\xi}(\rho) \Phi(\rho)} \rangle = \sigma_{\xi}^2.$$

Равенства (14) выполняются при подстановке  $\Delta_{\xi}(\rho) = \Phi(\rho) - \Psi_{\xi}(\rho)$  в выражения для функций корреляции с последующим усреднением с учетом (10)–(12). Таким же

образом находятся соотношения, связывающие разные алгоритмы:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\Delta_\xi(\rho) \Psi_{\mu\nu}(\rho)} \rangle &= 0, \\ \langle \overline{\Psi_\xi(\rho) \Psi_{\mu\nu}(\rho)} \rangle &= \langle \overline{\Psi_\mu(\rho) \Psi_\nu(\rho)} \rangle = \sigma_{\mu\nu}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Проведенный в Приложении 2 на основе соотношений (13)–(15) анализ алгоритмов управления I, II, III показывает, что с учетом (П2.5) дисперсию компенсации ошибки можно представить в следующем виде:

$$\Delta_{\mu\nu}^2 = \Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2 - \Delta_\mu \Delta_\nu K_{\mu\nu}, \quad (16)$$

где  $K_{\mu\nu}$  – усредненный по апертуре коэффициент корреляции ошибок  $\Delta_\mu(\rho)$  и  $\Delta_\nu(\rho)$ . Величина  $K_{\mu\nu}$  изменяется в промежутке [0, 1]. Неотрицательность коэффициента корреляции связана с тем, что рассматриваемые алгоритмы предполагают известными статистические свойства функции измеряемого распределения фазы и отсчетов измерителя ВФ.

Согласно соотношению (П2.7) ошибка компенсации находится в следующих пределах:

$$\begin{aligned} (\Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2)/2 \leq \Delta_{\mu\nu}^2 \leq \Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2, \\ \Delta_{\mu\nu} \approx 0.85(1 \pm 0.18) \sqrt{\Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Верхняя граница для  $\Delta_{\mu\nu}$  достигается, когда ошибки I и II не коррелируют между собой. Нижняя граница соответствует полной корреляции ошибок I и II; из общих соображений понятно, что это реализуется при  $\Delta_\mu^2 \approx \Delta_\nu^2$ .

Выражения (17) факторизуют зависимость ошибки компенсации от параметров  $\mu$ ,  $\nu$  и при разработке АОС дают основание для исследования измерителя и корректора ВФ независимо друг от друга. При согласовании параметров  $\mu$ ,  $\nu$  целесообразно исходить из равенства  $\Delta_\mu^2 \approx \Delta_\nu^2$ , что при эскизной разработке АОС позволяет избежать неоправданного усложнения системы.

В приведенных выше выражениях отсутствует явная зависимость от времени. Чтобы ее учесть, например в случае дискретных отсчетов во времени, достаточно выполнить следующие преобразования формул: заменить  $\Phi(\rho)$ ,  $\Psi(\rho)$ ,  $\{M_m\}$  и  $\{C_n\}$  на  $\Phi(\rho, t)$ ,  $\Psi(\rho, t)$ ,  $\{M_m(t_m)\}$  и  $\{C_n(t)\}$  соответственно. Здесь  $t$  – текущий момент времени, а  $t_m$  – момент регистрации  $m$ -го отсчета. При этом статистическое усреднение во всех соответствующих выражениях выполняется с учетом корреляции во времени, а все полученные соотношения сохраняют свою форму.

### 3. Результаты вычислительного эксперимента

В вычислительном эксперименте в качестве корректора ВФ рассматривается круглое деформируемое зеркало, измеритель ВФ выполнен на основе датчика Гартмана (ДГ). Актюаторы деформируемого зеркала размещены в узлах квадратной решетки, функции отклика описываются функцией Гаусса:  $r_n(\rho) = \exp[-(\rho - p_n)^2/\omega^2]$ , где  $p_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \nu$ ) – координаты узлов эквидистантной решетки с шагом  $p$ , а  $\omega$  – полуширина функции отклика; узлы решетки находятся в пределах световой апертуры корректора с радиусом  $R_L$ .

ДГ имеет  $\mu_g$  субапертур. Отсчеты ДГ пропорциональны локальным наклонам ВФ, измеренным в узлах квадратной решетки с координатами  $q_m = (q_{xm}, q_{ym})$ , точки отсчетов находятся в пределах световой апертуры. Оси решеток  $p$  и  $q$  сонаправлены, центры симметрии решеток совпадают с центром световой апертуры. Отсчеты ДГ суть  $M_m = D_u \Phi(q_m) + N_m$ , где  $N_m$  – шумовая компонента;  $D_u$  – оператор дифференцирования по переменной  $u$ , причем  $u = q_{xm}$  при  $m = 1, 2, \dots, \mu_g$  и  $u = q_{ym}$  при  $m = \mu_g + 1, \mu_g + 2, \dots, 2\mu_g$ ; полное число отсчетов  $\mu = 2\mu_g$ .

Функция корреляции случайного нормально распределенного поля  $\varphi(\rho)$  с нулевым среднестатистическим значением задавалась в гауссовой форме:

$$K_\varphi(\rho_1, \rho_2) = \overline{\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2)} = \sigma^2 \exp[-(\rho_1 - \rho_2)^2/\rho_c^2],$$

где  $\rho_c$  – радиус корреляции;  $\sigma^2$  – дисперсия фазы. При этом величина (7) среднего (по апертуре) квадрата фазы

$$\sigma_\Phi^2 = \sigma^2 \{1 - (2/a) \{1 - \exp(-a)[I_0(a) + I_1(a)]\}\}, \quad (18)$$

где  $a = 2/c^2$ ;  $c = \rho_c/R_L$  – относительный радиус корреляции;  $I_0(a)$  и  $I_1(a)$  – модифицированные [12] функции Бесселя (от мнимого аргумента). В результате приближенно имеем  $\sigma_\Phi^2 \approx \sigma^2/(1 + c^2)$ . Это соотношение получено из (18) путем согласования асимптотик при  $c \gg 1$  и  $c \ll 1$  и дает заниженное значение  $\sigma_\Phi^2$  с относительной погрешностью до 5%.

Принято, что шумы измерителя не коррелируют с наклонами  $D_u \Phi(q_m)$ , ошибки для отсчетов с различными номерами, а также ошибки по осям  $x$  и  $y$  статистически независимы;  $\bar{N}_m = 0$ ,  $\bar{N}_m^2 = \gamma(\text{grad}^2 \varphi(\rho))/2$ , где  $\text{grad}^2 \varphi(\rho) = 4\sigma^2/\rho_c^2$  – дисперсия локальных наклонов нормали к фазовой поверхности, а  $\gamma$  – относительная доля шумов.

Параметры системы в расчетах варьировались в следующих границах:  $0.1 \leq c \leq 1.0$ ,  $1 \leq \mu \leq 170$ ,  $1 \leq \nu \leq 137$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1.0$ . Типичные результаты расчетов на основе соотношения (7) с учетом (10)–(12) и принятых ограничений параметров системы представлены на рис. 1–3.

На рис. 1 приведены зависимости  $\Delta_\nu/\sigma$  (кривая 1, алгоритм II) от числа актюаторов  $\nu$  и зависимости  $\Delta_\mu/\sigma$  (кри-

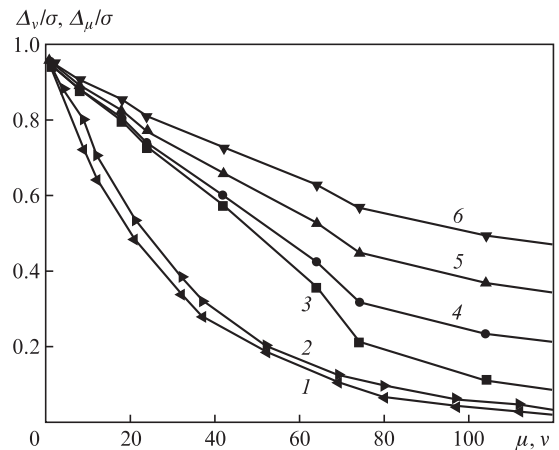


Рис. 1. Зависимости ошибок  $\Delta_\nu/\sigma$  от числа  $\nu$  актюаторов корректора (1) и  $\Delta_\mu/\sigma$  от числа  $\mu$  отсчетов измерителя ВФ (2–6), полученные при измерениях фазы (1, 2) и наклонов ВФ для  $\gamma = 0$  (3), 0.05 (4), 0.2 (5) и 0.5 (6). Радиус корреляции  $c = 0.3$ , полуширина функции отклика  $\omega = 2p$ .

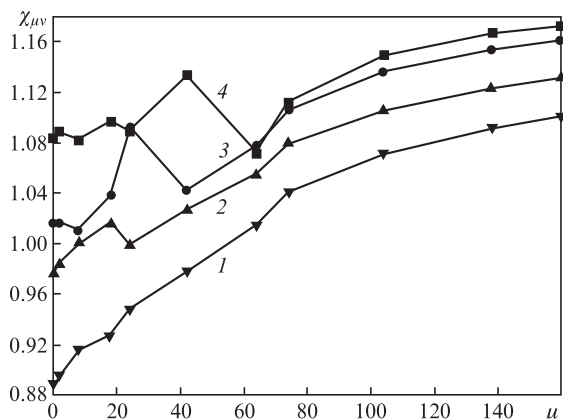


Рис.2. Зависимости величины  $\chi_{\mu\nu}$  от числа  $\mu$  отсчетов при числе актюаторов  $\nu = 37$ , радиусе корреляции  $c = 0.3$ , полуширине функции отклика  $\omega = 0.7\rho$  и  $\gamma = 0$  (1), 0.05 (2), 0.2 (3) и 0.5 (4).

вые 2–6, алгоритм I) от числа отсчетов  $\mu$  при различных относительных долях шумов  $\gamma$ . Когда в качестве отсчетов используется градиент фазы, при увеличении ошибки измерений, как и следовало ожидать, ошибка аппроксимации  $\Delta_\mu/\sigma$  возрастает (кривые 3–6). С ростом числа отсчетов  $\mu$  величина  $\Delta_\mu/\sigma$  начинает определяться шумовой составляющей и стремится к  $\sigma_{ns} \approx \sqrt{2\pi\gamma}/\sqrt{\mu c^2}$ . Данная оценка получена с учетом того, что фазовая ошибка для  $m$ -го отсчета пропорциональна производению  $N_m(R_L \sqrt{\pi}/\sqrt{2\mu})$ . Обозначим ошибку измерителя с учетом шумов  $\Delta_\mu(\sigma_{ns})$ . Считая матрицы  $\langle RR \rangle$  и  $\langle MM \rangle$  диагональными, с учетом (6)–(8) и (10) несложно найти оценку ошибки измерителя ВФ:

$$\Delta_\mu^2(\sigma_{ns}) \approx \sigma_\Phi^2/(1 + 1/\sigma_{ns}^2) + \Delta_\mu^2(0)/(1 + \sigma_{ns}^2), \tag{19}$$

где  $\Delta_\mu^2(0)$  – ошибка в отсутствие шумов.

На рис.2 представлена зависимость  $\chi_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}/(0.85 \times \sqrt{\Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2})$  от  $\mu$  при нескольких значениях  $\gamma$ . Исходя из (17) рассматриваемое отношение должно находиться в пределах 0.82–1.18, что полностью согласуется с данными рис.2.

На основе результатов вычислительного эксперимента для оценки величины  $K_{\mu\nu}$  применительно к АОС с ДГ получено следующее аппроксимирующее соотношение:

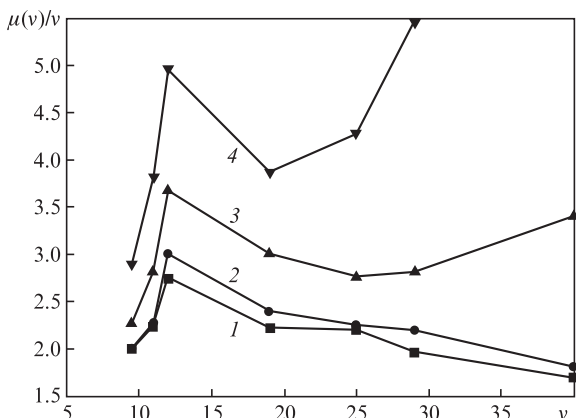


Рис.3. Зависимости относительного числа отсчетов  $\mu(v)/\nu$  от числа  $\nu$  актюаторов при радиусе корреляции  $c = 0.7$ , полуширине функции отклика  $\omega = 0.7\rho$  и  $\gamma = 0$  (1), 0.05 (2), 0.2 (3) и 0.5 (4).

$K_{\mu\nu} \approx (\Delta_\mu \Delta_\nu / \sigma_\Phi^2)^{4/5}$ . При этом максимальная погрешность при расчетах по формуле (16) не превышает 10%.

На рис.3 показаны зависимости  $\mu(v)/\nu$ , полученные при согласовании  $\mu$  и  $\nu$  исходя из условия  $\Delta_\mu \approx \Delta_\nu$ . Рассматриваемая зависимость является немонотонной. Из анализа рис.3 следует, что требуемое число отсчетов ДГ в 1.5–5.5 раза и более превышает число актюаторов  $\nu$ . При заданном числе отсчетов с ростом ошибки измерения требования к качеству корректора снижаются и, следовательно, необходимое число актюаторов по сравнению с числом отсчетов уменьшается.

При использовании в качестве отсчетов значений фазы  $M_m = \Phi(q_m)$  (кривые 1 и 2 на рис.1) требуемое число актюаторов при условии  $\Delta_\mu \approx \Delta_\nu$  (без учета шумовой ошибки измерителя ВФ) приближенно равно числу отсчетов. Такое отличие от случая измерений с помощью ДГ объясняется следующим образом. Допустим в какой-либо точке апертуры корректируемого пучка известны точные значения фазы  $\Phi(q_m)$  и производной  $D_u \Phi(q_m)$ . В окрестности этой точки значения производной могут существенно отклоняться от величины  $D_u \Phi(q_m)$ . Это различие тем больше, чем больше расстояние между точками отсчетов. Соответственно восстановленное с помощью  $D_u \Phi(q_m)$  значение фазы в какой-либо соседней точке может значительно отличаться от точного значения фазы. Эта ошибка уменьшается при увеличении числа отсчетов  $D_u \Phi(q_m)$  и отсутствует при использовании значений фазы  $\Phi(q_m)$  в качестве отсчетов. В последнем случае в формуле (16) коэффициент корреляции  $K_{\mu\nu} \approx (\Delta_\mu \Delta_\nu / \sigma_\Phi^2)^{2/5}$  и его величина в среднем больше, чем в случае измерений с помощью ДГ.

#### 4. Заключение

В настоящей работе получила дальнейшее развитие статистическая модель АОС фазового сопряжения. В едином математическом подходе рассмотрены три алгоритма, каждый из которых минимизирует один из следующих показателей: ошибку I измерителя (при идеальном корректоре); ошибку II корректора (при идеальных измерениях) и ошибку III компенсации (с учетом дискретности измерений, шумов измерителя, неполноты системы функций отклика актюаторов корректора). Исследованы функциональные и статистические связи между указанными алгоритмами. Найдено аппроксимирующее соотношение, которое с погрешностью не более 10% позволяет рассчитать ошибку III компенсации ВФ как функцию ошибок I, II измерителя и корректора ВФ. Полученное соотношение факторизует зависимость ошибки компенсации от числа  $\mu$  отсчетов измерителя и числа  $\nu$  актюаторов корректора и при разработке АОС позволяет исследовать измеритель и корректор ВФ независимо друг от друга. При согласовании параметров  $\mu$  и  $\nu$  целесообразно исходить из равенства ошибок измерителя и корректора. При этом, в случае использования в качестве измерителя ДГ, число актюаторов может быть меньше числа отсчетов в  $\sim 1.5$  и более раз. С ростом шумовой компоненты в ошибке измерений отмеченное различие возрастает; если дисперсия ошибки составляет 10% (от дисперсии наклонов корректируемого ВФ), то при  $\mu > 30-50$  величина  $\nu$  оказывается в 3–5 раз меньше.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-02-00942А).

### Приложение 1. Алгоритмы, минимизирующие ошибки измерителя и корректора ВФ, а также ошибку компенсации

*Задача I.* Ошибка измерителя, т.е. ошибка аппроксимации ВФ по отсчетам измерителя при идеальном корректоре, зависит от величин  $\{M_m\}$ , их функциональной связи с  $\Phi(\rho)$  и шумов измерения. Восстановленное распределение фазы представляется в виде суммы:

$$\Psi(\rho) = \sum_{m=1}^{\mu} M_m Q_m(\rho), \quad (П1.1)$$

где  $Q_m(\rho)$  – детерминированный, пространственно распределенный весовой коэффициент, с которым  $m$ -й отсчет измерителя ВФ учтен в распределении фазы. При минимизации ошибки (2) используется метод вариационного исчисления и оптимизируется вид функций  $\{Q_m(\rho)\}$ , составляющих столбец  $Q(\rho) = \|Q_m(\rho)\|$ . С учетом результатов работ [1, 5, 8] имеем

$$Q(\rho) = \overline{MM}^{-1} \overline{M\Phi(\rho)}, \quad \overline{M\Phi(\rho)} = \| \overline{M_m \Phi(\rho)} \|. \quad (П1.2)$$

После подстановки (П1.2) в (П1.1) получаем описание алгоритма восстановления:

$$\Psi(\rho) = M \overline{MM}^{-1} \overline{M\Phi(\rho)}. \quad (П1.3)$$

Из сравнения (П1.3) с (3) понятно, что  $H = \overline{MM}^{-1}$ , а функции  $\{M_m \Phi(\rho)\}$  аналогичны функциям отклика  $\{R_m(\rho)\}$  и могут условно рассматриваться как оптимальные функции отклика корректора ВФ. Таким образом, в задаче I

$$R(\rho) = \| \overline{M_m \Phi(\rho)} \|, \quad M = \| M_m \|, \quad H = \overline{MM}^{-1}. \quad (П1.4)$$

*Задача II.* При расчетах ошибки корректора ВФ принимается, что измерения ВФ выполнены безошибочно; при этом ошибка формирования функции распределения фазы обусловлена конечностью числа  $v$  каналов управления. Восстановленное распределение фазы представляется в виде суммы:

$$\Psi(\rho) = \sum_{n=1}^v C_n R_n(\rho).$$

Коэффициенты  $\{C_n\}$  находятся из условия минимальности  $\langle \Delta^2(\rho) \rangle$  [1, 4]:

$$C = \langle \Phi R \rangle \langle RR \rangle^{-1}, \quad \langle \Phi R \rangle = \| \langle \Phi(\rho) R_n(\rho) \rangle \|. \quad (П1.5)$$

Из сравнения (П1.5) с (3) следует, что  $H = \langle RR \rangle^{-1}$ , а матрица-строка  $\langle \Phi R \rangle$  является аналогом строки отсчетов  $M$ . В итоге в задаче II

$$R(\rho) = \| R_n(\rho) \|, \quad M = \| \langle \Phi(\rho) R_n(\rho) \rangle \|, \quad (П1.6)$$

$$H = \langle RR \rangle^{-1}.$$

При этом  $\overline{MM} = \| \langle \langle K_\Phi(\rho_1, \rho_2) R_n(\rho_1) R_m(\rho_2) \rangle \rangle \|$ , где  $K_\Phi$  – корреляционная функция  $\Phi(\rho)$ .

*Задача III.* При анализе алгоритма компенсации ВФ сформированное АОС распределение фазы  $\Psi(\rho)$  задается в виде линейной комбинации известных функций отклика  $\{R_n(\rho)\}$  актюаторов корректора, а управляющие воздействия задаются как линейная комбинация отсчетов  $\{M_m\}$  измерителя [1, 2, 8]:

$$\Psi(\rho) = \sum_{n=1}^v C_n R_n(\rho), \quad C_n = \sum_{m=1}^{\mu} M_m H_{nm}.$$

Величины  $\{H_{nm}\}$  являются искомыми и при оптимизации по критерию минимума показателя (2) составляют матрицу  $H = \overline{MM}^{-1} \langle \overline{M\Phi R} \rangle \langle RR \rangle^{-1}$ . Здесь  $\overline{MM} = \| \overline{M_n M_m} \|$ ;  $\langle \overline{M\Phi R} \rangle = \| \langle \overline{M_m \Phi(\rho) R_n(\rho)} \rangle \|$  – матрица перекрытия функций отклика  $R_n(\rho)$  с функциями  $\overline{M_m \Phi(\rho)}$  совместной корреляции измеряемой фазы и отсчетов измерителя;  $\langle RR \rangle = \| R_n(\rho) R_m(\rho) \|$ . Таким образом, в соотношениях (3)–(6) в условиях задачи III

$$R(\rho) = \| R_n(\rho) \|, \quad M = \| M_m \|, \quad (П1.7)$$

$$H = \overline{MM}^{-1} \langle \overline{M\Phi R} \rangle \langle RR \rangle^{-1}.$$

### Приложение 2. Оценка ошибки компенсации

Получим и исследуем три статистических соотношения.

1. Используя выражения (1), (13) и линейность операторов, выпишем цепочку равенств:

$$\Delta_{\mu\nu}(\Phi) = \Phi - \Psi_\nu(\Psi_\mu(\Phi)) = \Phi - [\Psi_\mu(\Phi) - \Delta_\nu(\Psi_\mu(\Phi))]$$

$$= \Delta_\mu(\Phi) + \Delta_\nu(\Phi - \Delta_\mu(\Phi)) = \Delta_\mu(\Phi) + \Delta_\nu(\Phi) - \Delta_\nu(\Delta_\mu(\Phi)),$$

или

$$\Delta_\nu(\Delta_\mu(\Phi)) = \Delta_\mu(\Phi) + \Delta_\nu(\Phi) - \Delta_{\mu\nu}(\Phi).$$

После возведения в квадрат последнего соотношения и усреднения с учетом (14) и (15) имеем

$$\langle \overline{\Delta_\nu^2(\Delta_\mu(\rho))} \rangle = \Delta_{\mu\nu}^2 - \Delta_\nu^2 - \Delta_\mu^2 + 2 \langle \overline{\Delta_\nu(\rho) \Delta_\mu(\rho)} \rangle \geq 0. \quad (П2.1)$$

2. Величина  $\sigma_{\mu\nu}^2 = \langle [\overline{\Phi(\rho) - \Delta_\mu(\rho)}][\overline{\Phi(\rho) - \Delta_\nu(\rho)}] \rangle$ . Раскрывая произведение, после преобразований с использованием формул (14), (15) получаем

$$\Delta_{\mu\nu}^2 = \Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2 - \langle \overline{\Delta_\nu(\rho) \Delta_\mu(\rho)} \rangle \geq 0. \quad (П2.2)$$

3. Рассчитаем величину  $\langle [\overline{\Delta_\mu(\rho) - \Delta_\nu(\rho)}]^2 \rangle$ . Раскрыв квадрат и выполнив усреднение, находим

$$\Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2 - 2 \langle \overline{\Delta_\nu(\rho) \Delta_\mu(\rho)} \rangle \geq 0. \quad (П2.3)$$

Рассматривая соотношения (П2.1)–(П2.3) как систему уравнений и неравенств путем алгебраических преобразований получаем

$$\langle \overline{\Delta_v(\rho)\Delta_\mu(\rho)} \rangle = \overline{\Delta_v^2(\Delta_\mu(\rho))} \geq 0, \quad (\text{П2.4})$$

$$\Delta_{\mu\nu}^2 = \Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2 - \langle \overline{\Delta_v(\rho)\Delta_\mu(\rho)} \rangle \geq 0, \quad (\text{П2.5})$$

$$0 \leq \langle \overline{\Delta_v(\rho)\Delta_\mu(\rho)} \rangle \leq (\Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2)/2. \quad (\text{П2.6})$$

Оценим пределы, в которых может варьироваться величина  $\Delta_{\mu\nu}^2$ . Подставляя (П2.6) в (П2.5), находим

$$(\Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2)/2 \leq \Delta_{\mu\nu}^2 \leq \Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2, \quad (\text{П2.7})$$

$$\Delta_{\mu\nu} \approx 0.85(1 \pm 0.18) \sqrt{\Delta_\mu^2 + \Delta_\nu^2}.$$

Нижняя граница в (П2.7) достигается при выполнении специальных требований к параметрам АОС, например  $\Phi_\nu(\Phi) = \Phi_\mu(\Phi)$  или  $\Delta_\mu^2 \approx \Delta_\nu^2$ .

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. *Принципы адаптивной оптики* (М.: Наука, 1985).
2. Тараненко В.Г., Шанин О.И. *Адаптивная оптика в приборах и устройствах* (М.: ФГУП «ЦНИИАТОМИНФОРМ», 2005).
3. *Адаптация в информационных оптических системах*. Под ред. Н.Д.Устинова (М.: Радио и связь, 1984).
4. *Адаптивная оптика*. Под ред. Э.А.Витриченко (М.: Мир, 1980).
5. Татарский В.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **24**, 861 (1981).
6. Vakut P.A., Kirakosyants V.E., Loginov V.A., Solomon C.J., Dainty J.C. *Opt. Commun.*, **109**, 10 (1994).
7. Лукин В.П. *Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере* (Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999).
8. Иванова Е.А., Кислов В.И., Четкин С.А. *Квантовая электроника*, **19**, 1207 (1992).
9. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1973).
10. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (М.: Наука, 1988).
11. Wong J.Y., Markey J.K. *J. Opt. Soc. Am.*, **68**, 78 (1978).
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Ч. 2* (М.: Наука, 1974).