

Обобщенная модель границы плазменной полости, возбуждаемой коротким лазерным импульсом или релятивистским электронным сгустком в поперечно-неоднородной плазме

А.А.Голованов, И.Ю.Костюков, А.М.Пухов, Й.Томас

Аналитическая модель плазменной полости (кильватерной волны в сильно нелинейном режиме) в поперечно-неоднородной плазме обобщена на случай произвольного профиля электронного слоя на ее границе. В рамках этого обобщения найден потенциал внутри плазменной полости и показано, что ее огибающая описывается уравнением второго порядка, подобным уравнению из менее общей теории. Найденны также области параметров, при которых это уравнение значительно упрощается и перестает зависеть от профиля электронного слоя.

Ключевые слова: кильватерное ускорение, сильно нелинейный режим.

1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется плазменным методам ускорения электронов [1, 2]. Суть этих методов заключается в том, что при прохождении через плазму мощного лазерного импульса [3] или сгустка заряженных частиц [4] в ней возбуждается кильватерная плазменная волна с большим продольным электрическим полем, которое может быть использовано для ускорения заряженных частиц. Благодаря этому можно достичь на несколько порядков более высоких темпов ускорения, чем при использовании стандартных методов. Одним из перспективных режимов возбуждения кильватерной волны является сильно нелинейный режим, при котором образуется плазменная структура в форме полости с практически отсутствующими электронами плазмы [5].

Интерес представляет и теоретическое исследование такого сильно нелинейного режима. Так, для него удалось построить аналитическую модель, описывающую огибающую плазменной полости для случая однородной плазмы [6]. Позднее было показано, что эту теорию можно обобщить на случай поперечно-неоднородной плазмы с осесимметричным профилем плотности [7]. Необходимость такого обобщения возникла при анализе полученных численно результатов, демонстрирующих, что использование плазмы с каналом в ней позволяет получить электронные сгустки с малым разбросом по энергии [8].

Недостатком существующих моделей, описывающих форму плазменной полости, является то, что в них вводятся различные допущения, не следующие из первых

принципов. В частности, в этих моделях постулируется определенный профиль электронного слоя на границе плазменной полости. Встречаются прямоугольный [6, 7] и экспоненциальный [9] профили. В настоящей работе мы избавляемся от этого допущения и предполагаем, что профиль имеет произвольный вид, обобщаем модель плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме [7] и находим уравнение для огибающей плазменной полости, а также показываем, что при определенных условиях выбор профиля не влияет на форму плазменной полости. Мы находим области параметров, для которых уравнение для огибающей представляется в простом виде, и показываем, что эти области параметров оказываются схожими для существенно разных профилей электронного слоя.

2. Общие уравнения

Пусть в плазме с поперечно-неоднородным профилем плотности $n(r)$ вдоль продольной оси z распространяется лазерный импульс или электронный сгусток, возбуждающий в ней плазменную полость. Для удобства мы будем рассматривать безразмерные величины, в которых время нормировано на ω_p^{-1} , координаты на $k_p^{-1} = c/\omega_p$, импульсы и энергии на mc и mc^2 соответственно, заряды на e , концентрации на n_p , а электрическое и магнитное поля на $mc\omega_p/e$. Здесь $e > 0$ – элементарный заряд; m – масса электрона; c – скорость света в вакууме; n_p – характерная концентрация плазмы (к примеру, для случая плазмы с глупым каналом это может быть концентрация вне канала); $\omega_p = (4\pi e^2 n_p / m)^{1/2}$ – характерная плазменная частота. Электромагнитное поле кильватерной волны удобно описывать с помощью вектора-потенциала A и кильватерного потенциала $\Psi = \phi - A_z$, где ϕ – скалярный потенциал электромагнитного поля.

Поскольку профиль плазмы цилиндрически-симметричен, предположим, что поля в кильватерной волне также обладают свойством цилиндрической симметрии, т. е. не зависят от азимутального угла φ . Также мы будем использовать квазистационарное приближение, в котором считается, что плазменная полость распространяется в плазме со скоростью, близкой к скорости света, и при

А.А.Голованов, И.Ю.Костюков. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; e-mail: agolovanov@appl.sci-nnov.ru, kost@appl.sci-nnov.ru
А.М.Пухов. Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Россия, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; Institut für theoretische Physik I, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Universitätsstr. 1, 40225 Düsseldorf, Deutschland
J.Thomas. Institut für theoretische Physik I, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Universitätsstr. 1, 40225 Düsseldorf, Deutschland

Поступила в редакцию 8 февраля 2016 г.

этом ее структура практически не изменяется во времени. В этом приближении все поля зависят только от комбинации времени и продольной координаты $\xi = t - z$. Для кильватерного потенциала Ψ и вектора-потенциала A мы используем калибровку Лоренца:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}. \tag{1}$$

В рамках этой калибровки уравнения для Ψ и A_z разделяются:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -J_z, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = J_z - \rho. \tag{3}$$

Данные потенциалы могут быть использованы для нахождения полей в кильватерной волне [6, 7, 9].

3. Модель электронного слоя

Согласно уравнению (3) источником для кильватерного потенциала Ψ является величина $S(\xi, r) = J_z - \rho$. Будем рассматривать модель плазменной полости, в которой полагается, что внутри этой полости, ограниченной кривой $r_b(\xi)$, полностью отсутствуют электроны плазмы, поэтому $J_z - \rho = -\rho_{ion}(r)$, а на границе плазменной полости находится тонкий электронный слой. В рамках этой модели источник $S(\xi, r)$ может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= s_{ion}(r), \quad r < r_b(\xi), \\ S &= s_0(\xi)g\left(\frac{r - r_b(\xi)}{\Delta}\right), \quad r > r_b(\xi), \end{aligned} \tag{4}$$

где $s_{ion}(r) = -\rho_{ion}(r)$; $r_b(\xi)$ – огибающая плазменной полости; Δ – характерная толщина электронного слоя на границе полости; $g(x)$ – произвольная функция, описывающая форму границы. Так, в аналитических моделях [6, 7] используется прямоугольный профиль $g(x) = \theta(1 - x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, а в работе [9] – экспоненциальный профиль $g(x) = \exp(-x)$.

Для дальнейшего анализа удобно ввести функции $M_n(x)$, связанные с профилем электронного слоя:

$$M_n(x) = \int_x^\infty y^n g(y) dy. \tag{5}$$

Мы также будем предполагать, что функция $g(x)$ достаточно быстро спадает, т.е. все интегралы M_n сходятся, и нормирована: $M_0(0) = 1$.

Функция $s_0(\xi)$, входящая в модель (4), может быть найдена из уравнения непрерывности аналогично тому, как это сделано в работе [7]:

$$s_0(\xi) = \frac{-S_{ion}(r_b(\xi))}{r_b(\xi)\Delta[1 + \varepsilon(r_b(\xi))M_1(0)]}, \tag{6}$$

где $\varepsilon(r_b) = \Delta/r_b$, а функция S_{ion} задается следующим образом:

$$S_{ion}(r) = \int_0^r s_{ion}(r')r' dr'. \tag{7}$$

Стоит отметить, что $S_{ion}(r) < 0$, т.к. $s_{ion}(r) = -\rho_{ion} < 0$.

4. Решение для потенциала

В рамках модели (4) решение уравнения (3) можно записать в виде $\Psi(\xi, r) = I(\xi, r) + \Psi_0(\xi)$, где

$$I(\xi, r) = \int_0^r \frac{dr'}{r'} \int_0^{r'} S(\xi, r'')r'' dr''. \tag{8}$$

Вне плазменной полости, т.е. для $r > r_b$, интеграл I представим в виде суммы двух интегралов по областям внутри и вне полости соответственно: $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1(\xi) = \int_0^{r_b} \frac{S_{ion}(r')}{r'} dr', \tag{9}$$

а $I_2(\xi, r)$ с использованием (6) можно представить в виде

$$I_2 = S_{ion}(r_b) \int_0^x \frac{\varepsilon dy}{1 + \varepsilon y} \left[\frac{M_0(y) + \varepsilon M_1(y)}{1 + \varepsilon M_1(0)} \right], \tag{10}$$

где $x(\xi, r) = [r - r_b(\xi)]/\Delta$; $\varepsilon = \varepsilon(r_b(\xi))$. Исходя из условия, что при $r \rightarrow \infty$ потенциал Ψ должен стремиться к нулю, мы можем найти $\Psi_0(\xi)$:

$$\Psi_0(\xi) = -\int_0^{r_b} \frac{S_{ion}(r')}{r'} dr' - \frac{S_{ion}(r_b)\beta(r_b)}{2}, \tag{11}$$

где функция $\beta(r_b)$ введена следующим образом:

$$\beta(r_b) = 2 \int_0^\infty \frac{\varepsilon dy}{1 + \varepsilon y} \left[\frac{M_0(y) + \varepsilon M_1(y)}{1 + \varepsilon M_1(0)} \right]. \tag{12}$$

В случае прямоугольного профиля данное определение функции β совпадает с определением из [7]. В работе [9], где рассматривается экспоненциальный профиль $g(x) = \exp(-x)$, данное обозначение не используется, но вычисление функции $\beta(r_b)$ для этого профиля позволяет получить такое же выражение для потенциала, как и в [9].

Таким образом, выражение для потенциала внутри плазменной полости можно записать в виде

$$\Psi(\xi, r) = -\int_r^{r_b} \frac{S_{ion}(r')}{r'} dr' - \frac{S_{ion}(r_b)\beta(r_b)}{2}. \tag{13}$$

Здесь зависимость потенциала от координаты ξ определяется огибающей полости $r_b(\xi)$. Выражение, полученное для потенциала Ψ внутри плазменной полости, по своему виду практически полностью совпадает с выражением, полученным в работе [7], отличаясь лишь определением функции $\beta(r_b)$, которая в общем случае задается выражением (12). Соответственно, полученное в работе [7] при помощи данного потенциала уравнение для огибающей плазменной полости также будет справедливо. Таким образом, огибающая плазменной полости $r_b(\xi)$ описывается уравнением

$$A(r_b)r_b'' + B(r_b)(r_b')^2 + C(r_b) = \Lambda(\xi)/r_b, \tag{14}$$

где $\Lambda(\xi)$ определяется электронными сгустками внутри полости,

$$\Lambda(\xi) = -\int_0^{r_b(\xi)} J_z(\xi, r') r' dr', \quad (15)$$

а коэффициенты, зависящие от функций $S_{\text{ion}}(r_b)$ и $\beta(r_b)$, в общем случае имеют такой же вид, как и в работе [7], но для функции $\beta(r_b)$, задаваемой соотношением (12). Следует отметить, что в уравнении (14) для простоты учтена возможность возбуждения полости только электронным сгустком. В случае, когда учитывается и действие лазерного поля, в коэффициенте C и в правой части уравнения появляются дополнительные члены, зависящие от вектора-потенциала лазерного поля, вид которых найден в работе [7].

Таким образом, нами показано, что для профиля электронного слоя произвольной формы можно найти уравнение второго порядка, которому подчиняется граница плазменной полости $r_b(\xi)$.

5. Приближения в уравнении для огибающей

В некоторых случаях уравнение (14) может быть значительно упрощено. Рассмотрим ситуацию, когда электронный слой на границе плазменной полости является достаточно тонким по сравнению с размерами полости, т.е. $\Delta \ll r_b$, что соответствует $\varepsilon(r_b) = \Delta/r_b \ll 1$. В таком случае функцию $\beta(r_b)$ можно линеаризовать по малому параметру $\varepsilon(r_b)$. Из (12) легко видеть, что при $\varepsilon \ll 1$

$$\beta(r_b) \approx 2\varepsilon \int_0^\infty M_0(y) dy = 2\varepsilon M_1(0). \quad (16)$$

В частности, для прямоугольного профиля $g = \theta(1-x)$ линейное разложение записывается как $\beta \approx \varepsilon(r_b)$, а для экспоненциального профиля $g = \exp(-x)$ – как $\beta \approx 2\varepsilon(r_b)$. Таким образом, $\beta(r_b) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой формы границы плазменной полости. В данном пределе два коэффициента в уравнении (14) для формы плазменной полости можно записать в более простом виде:

$$A(r_b) \approx 1 - \frac{S_{\text{ion}}(r_b)}{2}, \quad (17)$$

$$B(r_b) \approx -\frac{S_{\text{ion}}(r_b)r_b}{2}.$$

Коэффициент $C(r_b)$ в уравнении (14) имеет следующий вид:

$$C(r_b) = -\frac{S_{\text{ion}}(r_b)}{2r_b} \left[1 + \left(1 - \frac{S_{\text{ion}}(r_b)\beta(r_b)}{2} \right)^{-2} \right]. \quad (18)$$

Существуют два предельных случая, когда вид этого коэффициента тоже можно упростить.

5.1. Приближение бесконечно тонкого слоя

Допустим, что величина Δ настолько мала, что $|S_{\text{ion}}\beta/2| \ll 1$. С учетом выражения (16) это условие можно переписать в следующем виде:

$$\Delta \ll \left| \frac{r_b}{S_{\text{ion}}r_b M_1(0)} \right|. \quad (19)$$

В таком предельном случае $C(r_b) \approx -S_{\text{ion}}(r_b)/r_b$, и уравнение для огибающей $r_b(\xi)$ будет иметь вид

$$(S_{\text{ion}} - 2)r_b r_b'' + S_{\text{ion}} r_b'^2 (r_b')^2 + 2S_{\text{ion}} = -2\Lambda(\xi). \quad (20)$$

Следует отметить, что коэффициенты этого уравнения не зависят от функции $g(x)$, т.е. от профиля электронного слоя на границе полости.

Для примера рассмотрим область применимости этого приближения для случая однородной плазмы, т.е. $\rho_{\text{ion}}(r) = 1$. В этом случае, в соответствии с определением (7), $S_{\text{ion}}(r_b) = -r_b^2/2$, поэтому условие (19) записывается как $\Delta \ll 2/(r_b M_1(0))$. На рис.1, *a, б* показана область параметров, в которой данное приближение справедливо для прямоугольного ($g = \theta(1-x)$) и экспоненциального ($g = \exp(-x)$) профилей электронного слоя на границе плазменной полости. Видно, что данное приближение хорошо описывает плазменную полость только при очень малых значениях Δ . При этом области параметров для прямоугольного и экспоненциального профилей визуально практически не различаются, если в качестве второго параметра для экспоненциального профиля брать 2Δ вместо Δ . Это объясняется тем, что для экспоненциального профиля коэффициент перед линейным разложением функции $\beta(r_b)$ в два раза больше, чем для прямоугольного.

5.2. Релятивистское приближение

Рассмотрим теперь случай, противоположный предыдущему, т.е.

$$\Delta \gg \left| \frac{r_b}{S_{\text{ion}}(r_b) M_1(0)} \right|. \quad (21)$$

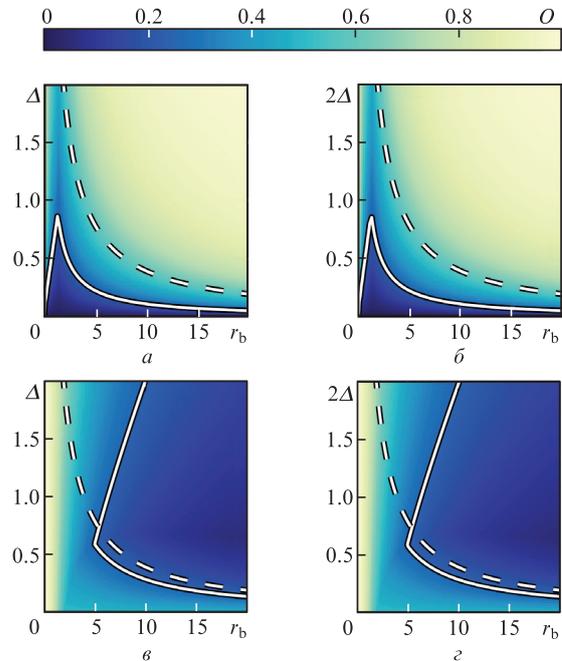


Рис.1. Максимальная относительная ошибка O вычисления коэффициентов A, B и C в приближении бесконечно тонкого слоя (*a, б*) и в релятивистском приближении (*в, г*) по сравнению с точным численным решением в пространстве параметров r_b, Δ для прямоугольного (*a, в*) и экспоненциального (*б, г*) профилей электронного слоя в случае однородной плазмы. Сплошные кривые соответствуют уровню 0.25, штриховые кривые отвечают $\Delta = 4/r_b$ (*a, в*) и $2\Delta = 4/r_b$ (*б, г*).

Физически это условие соответствует тому, что электроны в границе плазменной полости являются релятивистскими, поэтому данное приближение носит название релятивистского. Это условие можно выполнить одновременно с $\Delta \ll r_b$, если плазменная полость достаточно велика. В этом случае $C(r_b) \approx -S_{\text{ion}}(r_b)/(2r_b)$, а в коэффициенте $A(r_b)$ мы также должны пренебречь единицей, поэтому уравнение для $r_b(\xi)$ записывается в следующем виде:

$$S_{\text{ion}} r_b r_b'' + s_{\text{ion}} r_b^2 (r_b')^2 + S_{\text{ion}} = -2\Lambda(\xi). \quad (22)$$

В этом приближении коэффициенты уравнения также не зависят от профиля электронного слоя на границе полости, поэтому уравнение совпадает с полученным в работе [7]. Именно это приближение часто дает результаты, соответствующие результатам численного моделирования РИС-методом [6, 7].

Для примера рассмотрим также области параметров, где данное приближение справедливо, в случае однородной плазмы при тех же двух (прямоугольном и экспоненциальном) профилях электронного слоя на границе полости. Данные области показаны на рис.1, в, г. Как и в предыдущем случае, они практически неотличимы при использовании Δ и 2Δ в качестве второго параметра для прямоугольного и экспоненциального профилей соответственно. При этом видно, что для выполнения приближения неравенство (21) можно заменить менее строгим, $\Delta \geq 2r_b/M_1(0)$. Данное приближение несправедливо и при малых поперечных размерах r_b . Это означает, что в его рамках нельзя описать процесс возбуждения плазменной полости, т. к. изначально $r_b = 0$. Стоит отметить, что для любой заданной величины Δ можно найти плазменную полость достаточно большого размера r_b , при котором это приближение будет выполняться, что объясняет, почему это приближение часто достаточно хорошо согласуется с результатами численного моделирования РИС-методом.

6. Заключение

На основе уже созданной теории плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме нами рассмотрена обобщенная модель электронного слоя на границе плазменной полости, в которой профиль слоя имеет не только прямоугольную или экспоненциальную форму, как в предыдущих работах, но может быть описан произвольной функцией.

В рамках этой модели найден потенциал внутри плазменной полости и показано, что он имеет такой же вид, как и в частном случае теории для прямоугольного профиля, но вид используемой в нем функции $\beta(r_b)$ начинает зависеть от формы электронного слоя. Это позволяет применять дифференциальное уравнение второго порядка для описания огибающей плазменной полости и в общей теории.

Также показано, что уравнение для плазменной полости в общем случае имеет два приближения, в рамках которых оно не зависит от толщины и профиля электронного слоя на границе полости. Области применимости приближений оказываются схожими для существенно разных профилей (при соответствующем переопределении параметра толщины Δ). Это позволяет сделать вывод о том, что выбираемая форма профиля слабо влияет на форму огибающей плазменной полости, и оправдать описание плазменной полости при помощи простой модели с прямоугольным профилем электронного слоя на границе.

Однако профиль электронного слоя оказывает существенное влияние на электромагнитное поле вне плазменной полости, знание о котором необходимо для анализа процессов инжекции и самоинжекции электронов. Нахождение этого поля для произвольного профиля электронного слоя остается темой будущих работ.

Вывод общих уравнений и построение аналитической модели (А.А.Голованов) выполнены при поддержке Правительства РФ (проект № 14.В25.31.0008), анализ предельных случаев модели (И.Ю.Костюков) выполнен при поддержке РФФИ (проект №16-12-10383).

1. Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 1229 (2009).
2. Костюков И.Ю., Пухов А.М. *УФН*, **185**, 89 (2015).
3. Tajima T., Dawson J.M. *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 267 (1979).
4. Rosenzweig J.B., Cline D.B., Cole B., Figueroa H., Gai W., Konecny R., Norem J., Schoessow P., Simpson J. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 98 (1988).
5. Pukhov A., Meyer-ter-Vehn J. *Appl. Phys. B*, **74**, 355 (2002).
6. Lu W., Huang C., Zhou M., Mori W.B., Katsouleas T. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 165002 (2006).
7. Thomas J., Kostyukov I.Yu., Pronold J., Golovanov A., Pukhov A. arXiv:1510.09012 (2015).
8. Pukhov A., Jansen O., Tueckmantel T., Thomas J., Kostyukov I.Yu. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 245003 (2014).
9. Yi S.A., Khudik V., Siemon C., Shvets G. *Phys. Plasmas*, **20**, 013108 (2013).