

# Зависимость выхода высших гармоник от эллиптичности интенсивного лазерного поля: случай связанного s-состояния

Т.С.Саранцева, А.А.Силаев, Н.В.Введенский, М.В.Фролов, Н.Л.Манаков

*На основе численного решения нестационарного уравнения Шредингера исследуется зависимость выхода высших гармоник от эллиптичности лазерного поля. Для случая связанного состояния с нулевым орбитальным моментом показано, что различным гармоникам соответствуют разные зависимости выхода гармоник от эллиптичности. На основе аналитической модели генерации гармоник в эллиптически поляризованном поле дана интерпретация полученных численных результатов. Показано, что в квазиклассическом приближении изменение зависимостей выхода гармоник от эллиптичности обусловлено интерференционными эффектами на этапе распространения электрона в континууме вдоль замкнутых классических траекторий.*

**Ключевые слова:** фемтосекундные импульсы, атомы, ионизация, генерация высших гармоник, аттосекундные импульсы, численное моделирование.

## 1. Введение

Генерация высших гармоник (ГВГ) занимает одно из центральных мест в физике взаимодействия сверхсильных лазерных полей с атомными и молекулярными системами. Наличие характерной платообразной структуры в спектре высших гармоник позволяет использовать ГВГ для получения лазерных импульсов аттосекундной длительности [1, 2]. При этом особую актуальность имеет задача получения изолированного аттосекундного импульса. Одним из широко применяемых методов получения подобных импульсов является метод поляризационного стробирования [3–5], суть которого состоит в том, что поляризационные параметры импульса накачки подбираются таким образом, чтобы основной вклад в амплитуду ГВГ давал лишь один оптический период поля накачки. При этом вклады от остальных периодов поля подавляются путем увеличения эллиптичности лазерного поля накачки. Использование указанной техники получения изолированных аттоимпульсов требует детального анализа зависимости выхода высших гармоник от эллиптичности поля накачки. Указанная зависимость исследовалась в ряде работ [6–8], в последней из которых было показано, что зависимость выхода высших гармоник от эллиптичности лазерного импульса является достаточно универсальной и соответствует гауссову распределению.

Качественно особенности спектров высших гармоник описываются в рамках трехшаговой модели перерассея-

ния [9], в соответствии с которой процесс ГВГ можно разделить на три этапа. На первом этапе валентный электрон атома туннелирует через барьер, создаваемый атомным потенциалом и лазерным полем. На втором этапе электрон движется в модифицированном поле континуума и через некоторое время возвращается к родительскому остову, набрав дополнительную энергию от лазерного поля. Наконец, на третьем этапе электрон рекомбинирует в начальное связанное состояние с испусканием гармоник основного излучения. Как показано в работах [8, 10], гауссова зависимость выхода гармоник от эллиптичности обусловлена первым этапом – туннелированием валентного электрона в эллиптически поляризованном лазерном поле. В то же время влияние второго (распространение) и третьего (рекомбинация) этапов ГВГ на закон убывания выхода гармоник с ростом эллиптичности изучено не было. Целью настоящей работы является исследование отклонений зависимости выхода высших гармоник с ростом эллиптичности лазерного поля от гауссова закона, обусловленных особенностями распространения электрона в модифицированном поле континуума.

## 2. Численные результаты для спектра ГВГ

Взаимодействуя с атомной системой, интенсивное лазерное излучение индуцирует в ней дипольный момент  $\mathbf{D}(t)$ , спектральные характеристики которого определяют вероятность выхода гармоник [11]\*:

$$\rho(\Omega) = \frac{\Omega^4}{4c^3} |\mathbf{D}(\Omega)|^2, \quad \mathbf{D}(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(t) e^{i\Omega t} dt, \quad (1)$$

где  $\rho(\Omega)$  – спектральная плотность излучения на частоте  $\Omega$ ;  $\mathbf{D}(\Omega)$  – фурье-образ дипольного момента на частоте  $\Omega$ ;  $c$  – скорость света. В численных расчетах спектров ГВГ вместо дипольного момента  $\mathbf{D}(t)$  удобно использовать

\* В настоящей работе используются атомные единицы.

Т.С.Саранцева, А.А.Силаев, Н.В.Введенский. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: vved@appl.sci-nnov.ru  
М.В.Фролов. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Воронежский государственный университет, Россия, 394006 Воронеж, Университетская пл., 1  
Н.Л.Манаков. Воронежский государственный университет, Россия, 394006 Воронеж, Университетская пл., 1

дипольное ускорение  $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{D}}(t)$ , фурье-образ которого связан с  $\mathbf{D}(\Omega)$  очевидным соотношением:

$$\mathbf{a}(\Omega) = -\Omega^2 \mathbf{D}(\Omega). \quad (2)$$

Квантовомеханически (в приближении одного активного электрона) дипольное ускорение вычисляется как среднее значение суммарной силы, действующей на атомный электрон в сильном лазерном поле:

$$\mathbf{a}(t) = \int \psi^*(\mathbf{r}, t) [-\mathbf{F}(t) - \nabla U(\mathbf{r})] \psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

где  $\psi(\mathbf{r}, t)$  – волновая функция электрона в атомном потенциале  $U(\mathbf{r})$  и в лазерном поле с электрическим вектором напряженности  $\mathbf{F}(t)$ . Напряженность  $\mathbf{F}(t)$  может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}(t) = \frac{F_0}{\sqrt{1 + \eta^2}} f(t) [\mathbf{e}_x \cos(\omega t) + \eta \mathbf{e}_y \sin(\omega t)], \quad (4)$$

где  $F_0$  – пиковая напряженность электрического поля;  $\omega$  – несущая частота;  $\eta$  – степень эллиптичности поляризации; функция  $f(t)$  задает огибающую импульса. Для упрощения интерпретации численных результатов, в настоящей работе мы используем трапецеидальный импульс с двумя полными периодами на участках включения/выключения поля и четырьмя полными периодами на участке постоянной амплитуды поля:

$$f(t) = \begin{cases} t/(2T), & 0 < t \leq 2T, \\ 1, & 2T < t \leq 6T, \\ 1 - (t - 6T)/(2T), & 6T < t \leq 8T, \\ 0, & t \leq 0, t > 8T, \end{cases}$$

где  $T = 2\pi/\omega$ .

Точная волновая функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера (УШ):

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\nabla^2}{2} + U(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \mathbf{F}(t) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

с начальным условием  $\psi(\mathbf{r}, t=0) = \psi_0(\mathbf{r})$ , где  $\psi_0(\mathbf{r})$  – основное состояние в потенциале  $U(\mathbf{r})$  с орбитальным моментом  $l=0$ . Атомный потенциал выбирается в виде

$$U(\mathbf{r}) = -b \operatorname{sech}^2(r/a) - \tanh(r/a)/r \quad (6)$$

с параметрами  $a = 0.3$  и  $b = 2.17$ , обеспечивающими совпадение энергии основного s-состояния в указанном потенциале с энергией основного состояния атома водорода. Отметим, что на больших расстояниях ( $r \gg a$ ) поведение потенциала (6) определяется чисто кулоновской зависимостью:  $U(\mathbf{r}) \approx -r^{-1}$ .

Для численного интегрирования нестационарного УШ (5) мы используем псевдоспектральный метод с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье вдоль направлений  $x, y, z$  [12, 13]. Сходимость численных результатов обеспечивается выбором размеров сетки интегрирования и значениями пространственно-временных шагов: число узлов вдоль каждой из координат  $x, y$  и  $z$   $N_x = 512, N_y = N_z = 256$  соответственно, а шаги по времени

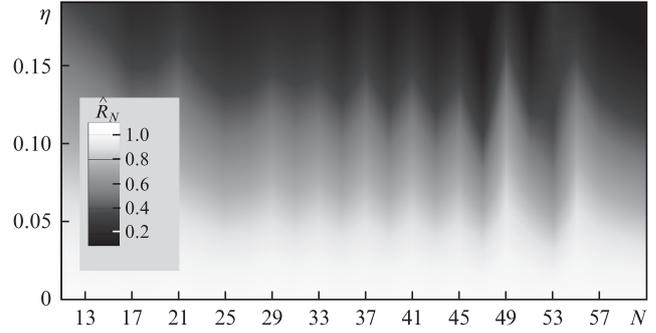


Рис.1. Зависимость приведенного выхода гармоник в области высокоэнергетического плато от степени эллиптичности поляризации лазерного импульса с несущей частотой  $\omega = 0.057$  при пиковой напряженности поля  $F_0 = 0.107$ .

и координатам  $\Delta t = 0.025, \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.3$ . Для подавления паразитных волн, проходящих сквозь границы сетки, используется поглощение в слоях шириной 20 вблизи границы сетки по координате  $x$  и 15 – по координатам  $y$  и  $z$ .

Для устранения влияния эффектов, связанных с наличием огибающей лазерного импульса, мы проводим усреднение численных результатов, вычисляя интегральный выход гармоник  $R_N$  в окрестности частот  $\Omega = N\omega$ :

$$R_N = \int_{(N-1)\omega}^{(N+1)\omega} \rho(\Omega) d\Omega, \quad \rho(\Omega) = |\mathbf{a}(\Omega)|^2 / (4c^3), \quad (7)$$

а для исследования зависимости выхода гармоник от степени эллиптичности  $\eta$  используем приведенные значения выхода гармоник

$$\hat{R}_N(\eta) = R_N(\eta) / R_N(\eta = 0). \quad (8)$$

На рис.1 представлена зависимость приведенного выхода  $\hat{R}_N$  от номера гармоники и степени эллиптичности  $\eta$  при  $\omega = 0.057$  (длина волны 800 нм) и при пиковой напряженности  $F_0 = 0.107$ , соответствующей пиковой интенсивности  $I_0 = cF_0^2/(8\pi) = 4 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>. Численные результаты показывают, что при фиксированном номере гармоники приведенный выход гармоник как функцию эллиптичности  $\eta$  можно аппроксимировать выражением:

$$\hat{R}_N(\eta) \approx (1 + f_N \eta^2)^{-2} e^{-\alpha \eta^2}, \quad (9)$$

где показатель  $\alpha$  является универсальным для всех гармоник, а коэффициент  $f_N$ , определяющий предэкспоненциальный фактор, существенно зависит от номера гармоники, например, для  $N = 45$  (см. рис.1) распределение по  $\eta$  с хорошей точностью определяется чисто гауссовым распределением, однако для  $N = 47$  приведенный выход  $\hat{R}_N(\eta)$  как функция  $\eta$  убывает значительно быстрее. Отметим, что нарушение гауссовой зависимости  $\hat{R}_N(\eta) \propto \exp(-\alpha \eta^2)$  для гармоник в области высокоэнергетического плато находится в противоречии с квазиклассическим результатом [8].

### 3. Интерпретация численных результатов

Для качественного анализа выхода высших гармоник в области высокоэнергетического плато воспользуемся аналитическим подходом, предложенным в работе [10] для начального состояния с нулевым орбитальным моментом. В рамках указанного подхода показано, что вы-

ражение для выхода высших гармоник вблизи точки обрыва высокоэнергетического плато может быть записано в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых имеет ясный физический смысл на языке трехшаговой модели перерасеяния [10]:

$$R_N(\eta) = I(\eta) W(E, \eta) \sigma(E, \theta = 0), \quad E = \Omega - I_p, \quad (10)$$

где  $I_p$  – потенциал ионизации основного состояния. Множитель  $I(\eta)$  описывает туннелирование электрона из связанного состояния  $\psi_0(\mathbf{r})$  в континуум, множитель  $W(E)$  описывает распространение электрона в континууме под действием сильного лазерного поля, а множитель  $\sigma(E, \theta)$  есть точное сечение фоторекомбинации электрона с энергией  $E$  в основном состоянии  $\psi_0(\mathbf{r})$  с испусканием фотона с частотой  $\Omega = N\omega$ , вектор поляризации которого составляет угол  $\theta$  с вектором импульса рекомбинирующего электрона. Из выражения (10) видно, что для случая связанного s-состояния приведенный выход высших гармоник не зависит от сечения фоторекомбинации:

$$\hat{R}_N(\eta) = \hat{I}(\eta) \hat{W}(E, \eta), \quad (11)$$

$$\hat{I}(\eta) = \frac{I(\eta)}{I(\eta=0)}, \quad \hat{W}(E, \eta) = \frac{W(E, \eta)}{W(E, \eta=0)}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь более детально каждый из факторов, входящих в выражение (11) для  $\hat{R}_N(\eta)$ .

Ионизационный множитель  $I(\eta)$  описывает туннелирование оптически активного электрона из связанного состояния  $\psi_0(\mathbf{r})$  в состояние непрерывного спектра (модифицированного сильным лазерным полем) с нулевой проекцией импульса вдоль главной оси эллипса поляризации и проекцией  $p_y = \eta\sqrt{2\varepsilon_0}$  вдоль малой оси эллипса поляризации, где  $\varepsilon_0 = 3.17U_p$ ,  $U_p = F_0^2/(4\omega^2)$ . Как показано в [10], фактор  $I(\eta)$  может быть представлен в виде

$$I(\eta) = \frac{4\Gamma_{st}(\tilde{F})}{\pi\kappa} (\gamma^2 + \delta\eta^2), \quad (13)$$

где  $\gamma = \omega\kappa/F_0$  – параметр Келдыша;  $\kappa = \sqrt{2I_p}$ ;

$$\delta = 1.585; \quad \tilde{F} = 0.95F_0(1 + \delta\eta^2/\gamma^2)^{-3/2},$$

а  $\Gamma_{st}(\tilde{F}) \propto \exp(-2\kappa^3/3\tilde{F})$  – вероятность распада в статическом электрическом поле с эффективной напряженностью  $\tilde{F}$  [14]. Анализ показывает, что зависимость от параметра  $\eta^2$  в пределе малой эллиптичности  $\eta$  оказывается существенной только в показателе экспоненты, тогда как в предэкспоненциальных факторах зависимостью от  $\eta^2$  можно пренебречь. В этом приближении, разложив показатель экспоненты в ряд,

$$\frac{1}{\tilde{F}} \approx \frac{1}{F_0} \left(1 + \frac{3}{2}\delta\eta^2/\gamma^2\right),$$

получим следующее выражение для ионизационного множителя  $I(\eta)$ :

$$I(\eta) \approx I(\eta=0)e^{-\alpha\eta^2}, \quad \alpha = \delta\kappa^3/(F_0\gamma^2). \quad (14)$$

Таким образом, зависимость приведенного ионизационного фактора  $\hat{I}(\eta) = I(\eta)/I(\eta=0)$  от эллиптичности опре-

деляется гауссовой зависимостью [8, 10] и не зависит от энергии (или номера) гармоники:

$$\hat{I}(\eta) \approx e^{-\alpha\eta^2}. \quad (15)$$

Пропагационный множитель  $W(E, \eta)$  в (10) описывает процесс распространения электрона в модифицированном поле континууме вдоль замкнутых классических траекторий и выражается через функцию Эйри  $\text{Ai}(x)$ :

$$W(E, \eta) = \sqrt{2E}\rho^2 \frac{\text{Ai}^2(\zeta)}{(\Delta t)^3}, \quad (16)$$

где

$$\zeta = \zeta_0 + 0.83F_0^{-2/3}\varepsilon_0\eta^2, \quad (17a)$$

$$\zeta_0 = \rho(E - \varepsilon_0 - 0.324I_p), \quad (17b)$$

$$\rho = (0.536F_0^2)^{-1/3}, \quad (17b)$$

$$\Delta t = 0.65T. \quad (17g)$$

Известно, что в области энергий фотона, близких к точке обрыва высокоэнергетического плато, только две замкнутые электронные траектории дают вклад в амплитуду процесса ГВГ [15]. Интерференция вкладов от указанных траекторий приводит к возникновению осцилляций в выходе высших гармоник, которые в (16) описываются функцией Эйри  $\text{Ai}(\zeta)$ . Используя (16), получим следующее выражение для приведенного пропагационного фактора:

$$\hat{W}(E, \eta) \approx \left( \frac{\text{Ai}(\zeta_0 + \beta\eta^2)}{\text{Ai}(\zeta_0)} \right)^2, \quad (18)$$

$$\beta = 0.83F_0^{-2/3}\varepsilon_0.$$

Остановимся более подробно на анализе выражения (18). В случае малых  $\eta$  при разложении функции Эйри в ряд по  $\eta^2$  до членов порядка  $\eta^2$ , оно принимает вид

$$\hat{W}(E, \eta) \approx \left[ 1 + \beta\eta^2 \frac{\text{Ai}'(\zeta_0)}{\text{Ai}(\zeta_0)} \right]^2. \quad (19)$$

Для анализа зависимости выхода гармоник от эллиптичности в области высокоэнергетического плато ( $E < \varepsilon_0$ ) можно воспользоваться асимптотиками функции Эйри и ее производной и упростить (19):

$$\hat{W}(E, \eta) \approx (1 + f(E)\eta^2)^2, \quad (20)$$

где

$$f(E) = -\beta\sqrt{|\zeta_0|} \text{ctg}\left(\frac{2}{3}|\zeta_0|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (21)$$

Очевидно, что при значениях аргумента  $\zeta_0$ , близких к одному из нулей функции Эйри, величина коэффициента  $f(E)$  неограниченно растет по абсолютному значению (см. (18) и (19)). Эти значения аргумента  $\zeta_0$  с хорошей точно-

стью могут быть найдены из выражения (21) как обращаящиеся в бесконечность котангенсы:

$$\zeta_n^{(\infty)} = -0.25[3\pi(4n + 3)]^{2/3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Подобное нефизичное поведение свидетельствует о том, что точности аналитического выражения (10) недостаточно для адекватного описания зависимости  $\hat{W}$  при  $\zeta_0 \rightarrow \zeta_n^{(\infty)}$ . Нулевое значение коэффициент  $f(E)$  принимает для значений  $\zeta_0$ , обращающих в нуль котангенс в соотношении (21):

$$\zeta_n^{(0)} = -0.25[3\pi(4n + 1)]^{2/3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Укажем, что условия (22) и (23) соответствуют условиям деструктивной и конструктивной интерференции короткой и длинной классических траекторий электрона в линейно поляризованном поле [16].

Полученные выше аналитические результаты (15) и (20) для приведенных ионизационного и пропационного факторов позволяют исследовать зависимость приведенного выхода гармоник с различными  $N$  от эллиптичности поля. Как уже было отмечено, приведенный ионизационный фактор (15) определяет универсальную (не зависящую от  $N$ ) гауссову зависимость приведенного выхода гармоник от  $\eta$ . Таким образом, различие в зависимости приведенного выхода гармоник от  $\eta$  для гармоник с различными  $N$  определяется наличием зависимости в приведенном пропационном факторе от эллиптичности  $\eta$  и энергии гармоник. Очевидно, что для двух гармоник с номерами  $N$  и  $N'$ , для которых приведенные пропационные факторы соотносятся как  $(\hat{W}(E_N, \eta) > \hat{W}(E_{N'}, \eta))$  ( $E_N = N\omega - I_p$ ), распределение приведенного выхода гармоник от  $\eta$  для  $N$ -й гармоник будет шире, чем для гармоник с номером  $N'$ .

Аналитический результат (20) позволяет установить ряд общих закономерностей поведения  $\hat{W}(E, \eta)$  и  $\hat{R}_N(\eta)$ . Рассмотрим последовательный набор гармоник, для которых значения  $\zeta_0$  удовлетворяют неравенству  $\zeta_{n+1}^{(\infty)} < \zeta_0 < \zeta_n^{(\infty)}$ . (Напомним, что при увеличении энергии гармоник в области высокоэнергетического плато абсолютное значение  $\zeta_0$  уменьшается и  $\zeta_0$  остается отрицательным (см. зависимость  $\zeta_0$  от энергии гармоник в (176)). В соответствии с (20), для указанной группы гармоник гармонике с наименьшим  $N$  будет соответствовать наибольшее значение величины  $f(E)$ , а гармонике с наибольшим  $N$  – наименьшее. Таким образом, выход гармоник с наименьшей энергией будет падать с ростом  $\eta$  медленнее, чем для гармоник с наибольшей энергией. Действительно, на рис.1 выход 45-й гармоник с ростом  $\eta$  затухает значительно медленнее, чем выход 47-й гармоник. Рассмотрим теперь группу гармоник, для которых значения  $\zeta_0$  удовлетворяют неравенству  $\zeta_{n+1}^{(0)} < \zeta_0 < \zeta_n^{(0)}$ . В этом случае часть гармоник имеет энергии, меньшие «пороговой» энергии, соответствующей  $\zeta_n^{(\infty)}$ , а часть – большие. При переходе через пороговую энергию знак  $f(E)$  меняется с отрицательного на положительный, что приводит к смене распределения  $\hat{R}_N$  по  $\eta$  с более узкого на более широкое, например, на рис.1 вероятность выхода 51-й гармоник существенно быстрее затухает с ростом  $\eta$ , чем для 55-й гармоник. Таким образом, при переходе от одной гармоник к другой происходит изменение зависимости приведенного выхода гармоник от эллиптичности поля, что и приводит к возникновению нерегулярного поведе-

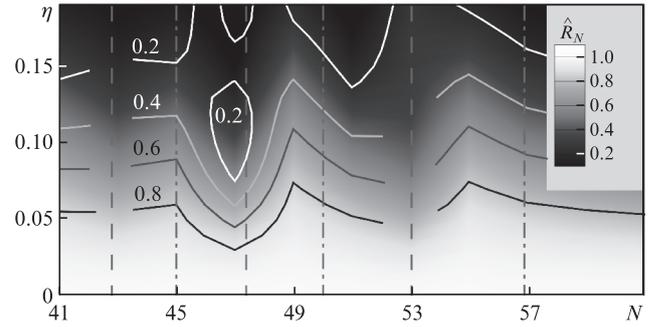


Рис.2. Зависимость приведенного выхода гармоник (см. выражение (8)) вблизи точки обрыва высокоэнергетического плато от степени эллиптичности и номера гармоник. Указаны значения  $N$  (в общем случае нецелые), удовлетворяющие условиям деструктивной (штриховые линии) (см. (22)) и конструктивной (штрих-пунктирные линии) (см.(23)) интерференции. Параметры лазерного поля те же, что и для рис.1.

ния найденной численно зависимости  $\hat{R}_N$  от  $\eta$  и  $N$  на рис.1.

На рис.2 показан приведенный выход высших гармоник вблизи точки обрыва высокоэнергетического плато для тех же параметров лазерного поля, что и для рис.1. Цветом (от светлого к темному) показаны результаты численного решения нестационарного УШ, а линии уровня соответствуют аналитическим результатам (11). Как видно из рис.2, аналитические результаты хорошо согласуются с результатами численного решения нестационарного УШ за исключением гармоник вблизи области деструктивной интерференции короткой и длинной классических траекторий электрона, для которых, как отмечалось выше, представленная теория не позволяет адекватно описать приведенный выход  $\hat{R}_N$ . Энергии указанных гармоник определяются из формулы (22) с учетом (176). Соответствующие номера гармоник в общем случае не являются целыми числами и зависят от параметров лазерного поля, поэтому на рис.2 не показаны линии уровня в окрестности гармоник с  $N = 43$  и 53, для которых энергии близки к энергиям, соответствующим положению штриховых линий на рис.2. Однако в окрестности гармоник с  $N = 47$  аналитические результаты достаточно хорошо согласуются с численными, поскольку энергия, соответствующая штриховой линии, дает значение  $N$ , существенно отличающееся от целого.

#### 4. Заключение

В настоящей работе исследована зависимость выхода высших гармоник от эллиптичности внешнего лазерного поля для случая ГВГ электроном, находящимся изначально в s-состоянии. Показано, что закон убывания выхода высших гармоник с ростом эллиптичности не является универсальным для гармоник в области плато. Отклонения закона убывания выхода высших гармоник от универсального гауссова распределения связаны с интерференцией траекторий электрона в лазерном поле, происходящей на втором этапе квазиклассического сценария ГВГ – этапе распространения электрона в континууме. Таким образом, в работе показано, что зависимость выхода высших гармоник от степени эллиптичности поляризации поля накачки определяется не только ионизационным этапом, как предполагалось ранее [8]. Следует отметить, что в рассмотренном случае связанного состояния

отсутствует зависимость приведенного выхода высших гармоник от параметров атомной мишени. Однако в более общем случае начального связанного s-состояния с ненулевым орбитальным моментом влияние атомной структуры на закон убывания выхода высших гармоник с ростом эллиптичности может оказаться существенным, так что этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-12-10033).

1. Corkum P.B., Krausz F. *Nature Phys.*, **3**, 381 (2007).
2. Krausz F., Ivanov M.Yu. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 163 (2009).
3. Corkum P.B., Burnett N.H., Ivanov M.Yu. *Opt. Lett.*, **19**, 1870 (1994).
4. Sansone G., Benedetti E., Calegari F., Vozzi C., Avaldi L., Flammini R., Poletto L., Villoresi P., Altucci C., Velotta R., et al. *Science*, **314**, 443 (2006).
5. Sansone G., Poletto L., Nisoli M. *Nature Photon.*, **5**, 655 (2011).
6. Kanai T., Minemoto S., Sakai H. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 053002 (2007).
7. He F., Ruiz C., Becker A. *Opt. Lett.*, **32**, 3224 (2007).
8. Möller M., Cheng Y., Khan S.D., Zhao B., Zhao K., Chini M., Paulus G.G., Chang Z. *Phys. Rev. A*, **86**, 011401R (2012).
9. Corkum P.B. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1994 (1993).
10. Frolov M.V., Manakov N.L., Sarantseva T.S., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **86**, 063406 (2012).
11. Frolov M.V., Manakov N.L., Popov A.P., Tikhonova O.V., Volkova E.A., Silaev A.A., Vvedenskii N.V., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **85**, 033416 (2012).
12. Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 115005 (2009).
13. Frolov M.V., Manakov N.L., Sarantseva T.S., Silaev A.A., Vvedenskii N.V., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **93**, 023430 (2016).
14. Смирнов Б.М., Чибицов М.И. *ЖЭТФ*, **49**, 841 (1965).
15. Lewenstein M., Balcou P., Ivanov M.Yu., L'Huillier A., Corkum P.B. *Phys. Rev. A*, **49**, 2117 (1994).
16. Frolov M.V., Manakov N.L., Sarantseva T.S., Starace A.F. *J. Phys. B*, **42**, 035601 (2009).