

Практическое применение адиабатического приближения и его упрощенного варианта для решения неинтегрируемой системы нелинейных уравнений Шредингера

В.А.Макаров, В.М.Петникова

На примере взаимодействия двух кноидальных волн с существенно разными периодами проведено сравнение результатов применения адиабатического приближения и его упрощенного варианта в процессе решения неинтегрируемой системы нелинейных уравнений Шредингера. Оценена временная граница области применимости упрощенного варианта адиабатического приближения.

Ключевые слова: кубическая нелинейность, гиротропия, дисперсия, кноидальные волны, адиабатическое взаимодействие, амплитудная и частотная модуляция.

1. Введение

Многие задачи волновой физики требуют анализа решений неинтегрируемых систем нелинейных дифференциальных уравнений [1–8]. Его осуществлению способствует знание частных и приближенных аналитических решений этих систем. Адиабатическое приближение [9–12] весьма эффективно для построения аналитических решений широко распространенной в нелинейной оптике системы двух связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ), описывающих, в частности, взаимодействия двух кноидальных волн [13, 14], кноидальной волны со светлым [15] и темным [16] солитонами, а также кноидальной волны с рациональным солитоном [17], солитоном Кузнецова–Ма [18] и бризером Ахмедиева [19]. В работах [13–17] использовался упрощенный вариант построения решений в адиабатическом приближении, существенно упрощающий достаточно громоздкие аналитические формулы [18–20] и делающий их наглядными и удобными для практического применения на малых временах взаимодействия. Было установлено, что медленно меняющаяся компонента электрического поля распространяющейся волны вызывает амплитудную и частотную модуляцию быстро меняющейся компоненты, локализованную в области изменения интенсивности первой.

В настоящей работе на примере взаимодействия двух кноидальных волн с существенно разными периодами проведено сравнение результатов применения адиабатического приближения [18–20] и его упрощенного варианта [13–17] и дана оценка временной границы области применимости последнего.

В.А.Макаров. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: vamakarov@phys.msu.ru, makarov@ibc.edu.ru

В.М.Петникова. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 3 июня 2017 г., после доработки – 3 августа 2017 г.

2. Адиабатическое взаимодействие эллиптически поляризованных компонент электрического поля

Реализуем адиабатическое приближение в задаче о распространении плоской эллиптически поляризованной электромагнитной волны через изотропную нелинейную гиротропную среду, которое описывается неинтегрируемой системой НУШ [13–20]

$$\frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} - i \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A_{\pm}}{\partial t^2} + i \left[\mp \rho_0 + \left(\frac{\sigma_1}{2} \mp \rho_1 \right) |A_{\pm}|^2 + \left(\frac{\sigma_1}{2} + \sigma_2 \right) |A_{\mp}|^2 \right] A_{\pm} = 0 \quad (1)$$

для медленно меняющихся амплитуд $A_{\pm}(z, t)$ ортогональных циркулярных компонент вектора напряженности электрического поля. Здесь z – координата распространения; t – время в бегущей системе координат; параметр $k_2 = \partial^2 k / \partial \omega^2 \neq 0$ учитывает частотную дисперсию второго порядка; $k(\omega)$ – волновое число; ω – несущая частота; $\sigma_1 = 4\pi\omega^2 \chi_{xyxy}^{(3)} / kc^2$ и $\sigma_2 = 2\pi\omega^2 \chi_{xxyy}^{(3)} / kc^2$ заданы независимыми компонентами тензора локальной кубической нелинейности $\hat{\chi}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$; $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2 \gamma_{0,1} / c^2$ определены через псевдоскалярные константы $\gamma_{0,1}$ линейной и нелинейной гирации.

Сравнение результатов применения адиабатического приближения и его упрощенного варианта удобно провести на примере результатов, полученных соответственно в работах [20] и [13], где найдены однотипные периодические решения $A_{\pm}(z, t) = r_{\pm}(t) \exp(ik_{\pm}z)$ системы (1) в классе функций с разделяющимися переменными, амплитуды $r_{\pm}(t)$ которых удовлетворяют неинтегрируемой системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 r_{\pm}}{dt^2} - \frac{2}{k_2} \left[\Delta \kappa_{\pm} + \left(\frac{\sigma_1}{2} \mp \rho_1 \right) r_{\pm}^2 + \left(\frac{\sigma_1}{2} + \sigma_2 \right) r_{\mp}^2 \right] r_{\pm} = 0, \quad (2)$$

где $\kappa_{\pm} = \kappa_{\pm} \mp \rho_0$. Пусть для определенности $r_{+}(t)$ изменяется медленно по сравнению с $r_{-}(t)$. Это дает возможность записать одно из периодических решений уравнения для

быстрой компоненты $r_-(t)$ в виде эллиптической функции Якоби [20]:

$$r_-(t) = C_-(t) \operatorname{dn}[\varphi_-(t), \mu_-], \quad (3)$$

где амплитуда $C_-(t)$ и мгновенная частота $v_-(t) = d\varphi_-(t)/dt$ – медленно меняющиеся с одинаковой скоростью функции; μ_- – свободный параметр. Подставляя (3) во второе уравнение системы (2) и пренебрегая производными $dC_-(t)/dt$, d^2C_-/dt^2 и $d^2\varphi_-/dt^2$ от медленно меняющихся функций, находим:

$$C_-(t) = \left(\frac{2[2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2(t)]}{(\mu_-^2 - 2)(\sigma_1 + 2\rho_1)} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$\varphi_-(t) = \int_0^t v_-(t_1) dt_1 = \int_0^t \left(\frac{2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2(t_1)}{k_2(2 - \mu_-^2)} \right)^{1/2} dt_1. \quad (5)$$

В уравнении для медленной компоненты $r_+(t)$ адиабатическое приближение позволяет усреднить быструю функцию $r_-^2(t)$ по ее периоду $T_- = 2K(\mu_-)/(d\varphi_-/dt)$. С учетом медленности функций $C_-(t)$ и $d\varphi_-(t)/dt$ получаем

$$\begin{aligned} \langle r_-^2 \rangle_t &= \frac{1}{T_-} \int_t^{t+T_-} \{C_-(t_1) \operatorname{dn}[\varphi_-(t_1, \mu_-)]\}^2 dt_1 \\ &= \frac{C_-^2(t)}{T_-} \left[\frac{d\varphi_-(t)}{dt} \right]^{-1} \int_{\varphi_-}^{\varphi_- + 2K(\mu_-)} \operatorname{dn}^2(\varphi_-, \mu_-) d\varphi_- \\ &= \frac{2E(\mu_-)[2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2(t)]}{K(\mu_-)(\mu_-^2 - 2)(\sigma_1 + 2\rho_1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $K(\mu_-)$ и $E(\mu_-)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. После подстановки (6) в первое уравнение системы (2) оно становится независимым. Аналогично [20] получаем одно из его решений в виде

$$r_+(t) = C_+ \operatorname{cn}(v_+ t, \mu_+), \quad (7)$$

где

$$C_+ = 2 \left(\frac{\mu_+^2 [2E(\mu_-)(\sigma_1 + 2\sigma_2)\Delta\kappa_- - K(\mu_-)(2 - \mu_-^2)(\sigma_1 + 2\rho_1)\Delta\kappa_+]}{(2\mu_+^2 - 1)[K(\mu_-)(2 - \mu_-^2)(\sigma_1^2 - 4\rho_1^2) - 2E(\mu_-)(\sigma_1 + 2\sigma_2)^2]} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$v_+ = \left(\frac{2}{k_2(2\mu_+^2 - 1)} \left[\Delta\kappa_+ - \frac{2E(\mu_-)(\sigma_1 + 2\sigma_2)\Delta\kappa_-}{K(\mu_-)(2 - \mu_-^2)(\sigma_1 + 2\rho_1)} \right] \right)^{1/2}, \quad (9)$$

$\operatorname{cn}(v_+ t, \mu_+)$ – эллиптический косинус Якоби.

Выражение (7) определяет амплитудную и частотную модуляцию быстро меняющейся компоненты $r_-(t)$ (см. (3)–(5)).

В упрощенном варианте адиабатического приближения [13–17] компонента $r_+(t)$ на первом этапе считалась не медленно меняющейся, а полностью «замороженной». В этом случае вместо (3) имеем

$$\begin{aligned} r_-(t) &= \left(\frac{2[2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2]}{(\mu_-^2 - 2)(\sigma_1 + 2\rho_1)} \right)^{1/2} \\ &\times \operatorname{dn} \left(\left(\frac{2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2}{k_2(2 - \mu_-^2)} \right)^{1/2} t, \mu_- \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка (10) в (6), естественно, дает результат, совпадающий с (7)–(9). Таким образом, решения, полученные в ходе реализаций адиабатического приближения [20] и его упрощенного варианта [13], одинаково предсказывают модуляцию амплитуды и мгновенной частоты быстрой компоненты электрического поля, локализованную в области изменения интенсивности медленно меняющейся компоненты. Однако применение упрощенного алгоритма при больших временах взаимодействия волн может привести к появлению фазовых искажений (внешне напоминающих хаотические изменения) из-за того, что фаза (5) при получении (10) находится приближенно:

$$\begin{aligned} \varphi_-(t) &= \int_0^t \left(\frac{2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2(t_1)}{k_2(2 - \mu_-^2)} \right)^{1/2} dt_1 \\ &\approx \left(\frac{2\Delta\kappa_- + (\sigma_1 + 2\sigma_2)r_+^2(t)}{k_2(2 - \mu_-^2)} \right)^{1/2} t. \end{aligned} \quad (11)$$

Оба алгоритма адиабатического приближения полностью эквивалентны на временах

$$t \ll t_0 \approx \left| \frac{d\varphi_-(t)}{dt} \left[\frac{d^2\varphi_-(t)}{dt^2} \right]^{-1} \right|. \quad (12)$$

Именно при $t < t_0$ в [13–17] наблюдалось регулярное поведение быстрой компоненты электрического поля, а при $t > t_0$ возникал режим нерегулярных изменений $r_-(t)$.

Появление нарастающих со временем искажений при приближенном вычислении $\varphi_-(t)$ иллюстрирует рис.1. При $t \leq t_0/8$ зависимости $r_-(t)$, вычисленные в адиабатическом приближении (сплошные кривые) и при осуществлении его упрощенного варианта (штриховые кривые), практически совпадают, а в области $t \approx t_0/2$ их различие не превышает нескольких процентов. Отметим, что благодаря

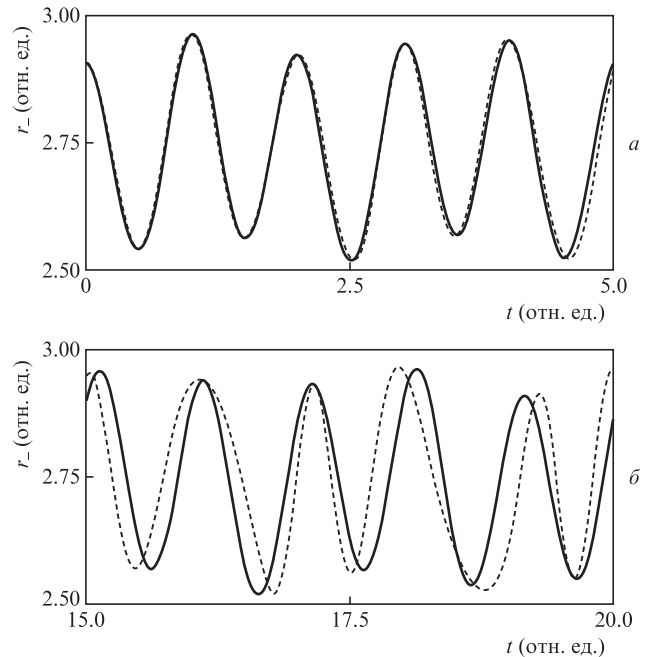


Рис.1. Зависимости $r_-(t)$, вычисленные в адиабатическом приближении (сплошная кривая) и при реализации его упрощенного варианта (штриховая кривая) для $t \leq t_0/8$ (а) и вблизи $t_0/2$ (б) при $t_0 = 40$, $k_2 = 1$, $\sigma_1 = -3$, $\sigma_2 = 1$, $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 0.2$, $\Delta\kappa_+ = 3.8$, $\Delta\kappa_- = 10$, $\mu_+ = 0.6993$, $\mu_- = 0.5$.

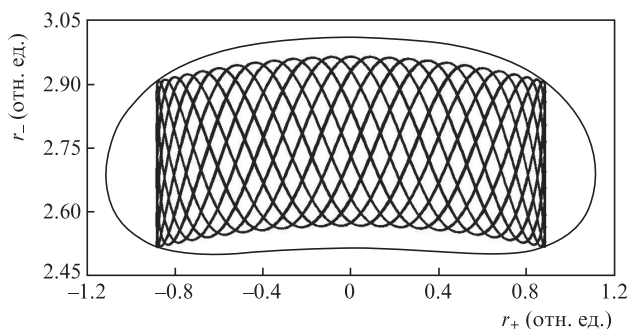


Рис.2. Зависимость $r_-(r_+)$ (жирная линия) и отвечающая начальным значениям $r_{\pm}(0)$ изолиния потенциальной энергии (тонкая линия) при $k_2 = 1, \sigma_1 = -3, \sigma_2 = 1, \rho_0 = 1, \rho_1 = 0.2, \Delta\kappa_+ = 3.8, \Delta\kappa_- = 10, \mu_+ = 0.6993, \mu_- = 0.5$.

периодичности быстрой компоненты зависимость ее фазы (5) от параметров медленной компоненты в течение всего времени взаимодействия реализуется лишь в пределах последнего периода изменения быстрой компоненты. Таким образом, на больших временах взаимодействия адиабатическое приближение и его упрощенный вариант дают одинаковые результаты в самом начале каждого периода изменения быстрой компоненты. Фактически происходит сброс начала отсчета времени для каждого следующего периода быстрой компоненты на нуль с пересчетом начальных условий для медленной компоненты.

Вычисленная в адиабатическом приближении для больших времен взаимодействия зависимость $r_-(r_+)$ (актуальная для определения нелинейных связей в системе) имеет, в отличие от [13], регулярный вид (рис.2) и не выходит за изолинию потенциальной ямы, отвечающую начальным значениям $r_{\pm}(0)$.

3. Заключение

Адиабатическое приближение и его упрощенный вариант дают одинаковые выражения для медленной компоненты поля, предсказывают модуляцию амплитуды и мгновенной частоты быстрой компоненты, локализованную в области изменения интенсивности медленной. Упрощенный алгоритм позволяет получать правильные количественные результаты для фазы быстрой компоненты на временах $t \ll t_0$, определяемой формулой (12), и качественные закономерности – до $t \leq t_0$. Основным преимуществом упрощенного алгоритма является его нагляд-

ность и простота применения. При этом и строгий вариант адиабатического приближения достаточно легко реализуем по сравнению с методом многих масштабов [21–23], традиционно используемым для решения линейных и нелинейных уравнений с известными медленно меняющимися параметрами. Если в уравнении для быстрой компоненты $r_-(t)$ (второе уравнение системы (2)) содержащий медленную компоненту множитель считать заданной функцией, то оно превратится в хорошо известное уравнение Дюффинга. Формулы (7)–(9) при этом окажутся его приближенным решением первого порядка, полученным в работе [24] методом многих (двух) масштабов.

- Christiansen P.L. et al. *Proc. Royal Soc.*, **A456**, 2263 (2000).
- Chen Zhigang et al. *Rep. Prog. Phys.*, **75**, 086401 (2012).
- Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Phys. Rev. E*, **76**, 046611 (2007).
- Bludov Yu.V. et al. *Eur. Phys. J.*, **185**, 169 (2010).
- Kalla C. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**, 335210 (2011).
- Zhao Li-Chen, Liu Jie. *Phys. Rev. E*, **87**, 013201 (2013).
- Cheng Xue-Ping et al. *Phys. Rev. E*, **89**, 043202 (2014).
- Юшко О.В., Редюк А.А. *Квантовая электроника*, **44**, 606 (2014) [*Quantum Electron.*, **44**, 606 (2014)].
- Давыдов А.С. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1973).
- Мессиа А. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1979, т. 2).
- Griffiths D.J. *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall Inc., 1995).
- Berry M.V. *Quantum, Classical and Semiclassical Adiabaticity*, in *Theoretical and Applied Mechanics*. Ed. by F.I.Niordson, N.Olhoff (North-Holland, Elsevier Sci. Publ., 1985, pp 83–96).
- Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Laser Phys.*, **24**, 085405 (2014).
- Макаров В.А., Петникова В.М., Руденко К.В., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **45**, 35 (2015) [*Quantum Electron.*, **45**, 35 (2015)].
- Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Laser Phys. Lett.*, **11**, 115402 (2014).
- Makarov V.A., Petnikova V.M., Rudenko K.V., Shuvalov V.V. *Phys. Wave Phenom.*, **23**, 96 (2015).
- Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *Opt. Express*, **22**, 26607 (2014).
- Makarov V.A., Petnikova V.M., Shuvalov V.V. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **737**, 012005 (2016).
- Makarov V.A., Petnikova V.M. *Laser Phys.*, **27**, 025402 (2017).
- Макаров В.А., Петникова В.М., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **46**, 578 (2016) [*Quantum Electron.*, **46**, 578 (2016)].
- Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. *Линейные колебания и волны* (М.: Физматлит, 2001).
- Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (М.: Наука, 1985).
- Найфэ А. *Методы возмущений* (М.: Мир, 1976).