ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

Некоторые особенности распространения света в трехканальном нелинейном направленном ответвителе

П.И.Хаджи, К.Д.Ляхомская, Л.Ю.Надькин

Получены точные аналитические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений для интенсивностей волн, распространяющихся в трехканальном нелинейном направленном ответвителе с керровской нелинейностью и различными константами связи между световодами.

Ключевые слова: *трехканальный нелинейный направленный ответвитель, константа связи, длина связи, самозахват.*

1. Введение

Особое место среди искусственных полупроводниковых структур с заданными функциональными характеристиками, предназначенных для хранения, передачи и обработки оптической информации, занимают различные пространственно-периодические структуры, в частности нелинейные направленные ответвители (ННО). Принципиальным условием их функционирования является возможность управления процессом распространения излучения. В настоящее время разработана удовлетворительная теория распространения лазерного излучения в ННО для сред с керровской нелинейностью в показателе преломления. Для этого случая получены точные аналитические решения системы нелинейных уравнений для интенсивностей распространяющихся волн [1–4]. В [2] предсказано явление самопереключения волн в ННО, которое состоит в том, что слабые изменения входной интенсивности одной из волн вызывают резкие изменения интенсивностей обеих волн на выходе ННО. Однако аналитические решения получены только для ННО, состоящего из двух световодов с керровскими нелинейностями. Что касается ННО, состоящих из трех и более световодов, то особенности распространения света в них изучались только численными методами с использованием системы нелинейных уравнений для связанных волн [2–11]. Поэтому большой интерес представляют возможность получения аналитических решений уравнений для многоканальных ННО и исследование особенностей их функционирования. В настоящей работе получены точные аналитические решения системы нелинейных уравнений для интенсивностей распространяющихся волн в симметричном трехканальном ННО с керровской нелинейностью постоянной распространения и различными константами связи между световодами. При этом используется подход, предложенный в [12, 13].

П.И.Хаджи, К.Д.Ляхомская, Л.Ю.Надькин. Приднестровский государственный университет им. Т.Г.Шевченко, Молдова, MD-3300 Тирасполь, ул. 25 Октября, 128; e-mail: ksedanna@yandex.ru, nadkin@gmail.com

Поступила в редакцию 1 декабря 2016 г., после доработки – 30 января 2017 г.

2. Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим симметричный ННО, который состоит из трех идентичных параллельных световодов, расположенных в углах равнобедренного треугольника (рис.1). Константы связи между световодами с номерами $n = 1, 2$ и номерами $n = 1, 3$ равны γ, а между световодами с номерами $n = 2, 3 - \gamma_1$. Таким образом, данная конфигурация в двух предельных случаях $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_1 = \gamma$ сводится к ранее рассмотренным системам [5–8].

Считаем, что световоды характеризуются керровской нелинейностью постоянной распространения: $\beta = \beta_0 + \alpha I$, где β_0 – линейная часть постоянной распространения; α – керровская поправка; I – интенсивность распространяющейся волны. Нелинейные дифференциальные уравнения для амплитуд полей E_1, E_2 и E_3 связанных волн в каждом из световодов, распространяющихся вдоль оси x ННО, в этом случае имеют следующий вид [2–11]:

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}(\beta_0 + \alpha I_1)E_1 + \mathrm{i}\gamma(E_2 + E_3),$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}(\beta_0 + \alpha I_2)E_2 + \mathrm{i}\gamma E_1 + \mathrm{i}\gamma_1 E_3, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_3}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}(\beta_0 + \alpha I_3)E_3 + \mathrm{i}\gamma E_1 + \mathrm{i}\gamma_1 E_2.$$

Здесь $I_n = (c/8\pi)|E_n|^2$, $n = 1, 2, 3$.

Рассмотрим случай, когда накачивается первый световод ($n = 1$) (рис.1). Систему (1) дополним граничными условиями:

$$E_{1|x=0} = E_0, \quad E_{2|x=0} = E_{3|x=0} = 0. \tag{2}$$

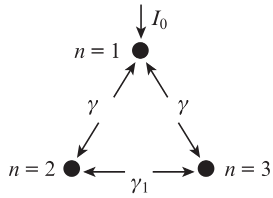

Рис.1. Схема ННО в сечении, перпендикулярном оси световодов.

Система уравнений (1) описывает стационарное распространение излучения в световодах. При этом множители $\beta_0 + \alpha I_j$ ($j = 1, 2, 3$) описывают изменение эффективной постоянной распространения каждого световода в зависимости от интенсивности распространяющегося в нем излучения (эффект Керра). Что касается констант связи между световодами, то в (1) они считаются постоянными, не зависящими от интенсивности. Уравнения (1) справедливы при условии, что отсутствует генерация новых мод в процессе нелинейного распространения излучения в световодах. Они применяются при слабых нелинейных возмущениях и для существенно разделенных друг от друга световодов [1–8].

Рассмотрим решение в виде $E_n(x) = f_n(x)\exp(-\mathrm{i}\beta_0 x)$. Для функций $f_n(x)$ в этом случае получаем

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\alpha I_1 f_1 + \mathrm{i}\gamma(f_2 + f_3),$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\alpha I_2 f_2 + \mathrm{i}\gamma f_1 + \mathrm{i}\gamma_1 f_3, \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\alpha I_3 f_3 + \mathrm{i}\gamma f_1 + \mathrm{i}\gamma_1 f_2.$$

Граничные условия для функций $f_n(x)$ аналогичны (2): $f_{1|x=0} = f_0, f_{2|x=0} = f_{3|x=0} = 0$. Покажем, что в этих условиях амплитуды полей (интенсивности) в световодах $n = 2$ и 3 будут одинаковыми в любой точке x. Для этого введем функцию $p = f_2 - f_3$ с граничным условием $p_{|x=0} = 0$. Тогда из (3) получаем следующее дифференциальное уравнение для функции $p(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\alpha\frac{c}{8\pi}[|p|^2 p + p^2 f_3^* + 2|p|^2 f_3 + 2p|f_3|^2 + f_3^2 p^*] - \mathrm{i}\gamma_1 p. \qquad (4)$$

Пусть $p = Q\exp(\mathrm{i}\varphi)$, $f_3 = F\exp(\mathrm{i}\psi)$, где Q и F – амплитуды, а φ и ψ – фазы функций p и f_3. Подставляя эти выражения в (4) и выделяя действительную и мнимую части уравнения (4), получаем

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -\alpha Q[QF\sin(\varphi - \psi) + F^2\sin(2\varphi - 2\psi)]. \qquad (5)$$

Так как все функции зависят от x, то множитель в квадратных скобках в правой части (4) будем считать некоторой функцией, зависящей от x:

$$f(x) = QF\sin(\varphi - \psi) + F^2\sin(2\varphi - 2\psi).$$

Тогда уравнение (5) можно записать в форме

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -\alpha Q f(x).$$

Его решение имеет вид

$$Q = A\exp\left(-\int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right),$$

где A – константа интегрирования. Удовлетворяя граничному условию $Q_{|x=0} = 0$, получаем $A = 0$. Таким образом, в любой точке ННО выполняется соотношение

$$Q(x) = |f_2(x) - f_3(x)| = 0, \qquad (6)$$

то есть абсолютное значение разности комплексных амплитуд полей f_2 и f_3 равно нулю. Представляя их в виде $f_2 = F_2\exp(\mathrm{i}\varphi_2)$, $f_3 = F_3\exp(\mathrm{i}\varphi_3)$ и подставляя в (6), приходим к выражению

$$F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3\cos(\varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

В соответствии с теоремой косинусов это соотношение выполняется при $F_2 = F_3$ и $\varphi_2 = \varphi_3 + 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда окончательно следует, что $f_2 = f_3$ в любой точке x ННО. Это обстоятельство позволяет существенно упростить систему (3) и привести ее к следующему виду:

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\alpha I_1 f_1 + 2\mathrm{i}\gamma f_2,$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\alpha I_2 f_2 + \mathrm{i}\gamma f_1 + \mathrm{i}\gamma_1 f_2. \qquad (7)$$

Из (7) видно, что ННО с тремя идентичными световодами, расположенными в вершинах равнобедренного треугольника, при накачке в находящийся на вершине этого треугольника световод эквивалентен ННО с двумя различными световодами, у которых разные постоянные распространения, а константа связи первого световода со вторым в два раза больше константы связи второго световода с первым.

Введем в рассмотрение функции [12]:

$$I_{1,2} = \frac{c}{8\pi}|f_{1,2}|^2, \quad Q = \frac{\mathrm{i}c}{8\pi}(f_2^* f_1 - f_1^* f_2),$$

$$R = \frac{c}{8\pi}(f_2^* f_1 + f_1^* f_2). \qquad (8)$$

Используя (7) и систему сопряженных уравнений, для новых функций получаем следующую систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}x} = -2\gamma Q, \quad \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}x} = \gamma Q, \qquad (9)$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = [\alpha(I_1 - I_2) + \gamma_1]R + 2\gamma(I_1 - 2I_2), \qquad (10)$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = -[\alpha(I_1 - I_2) + \gamma_1]Q. \qquad (11)$$

В соответствии с (2) граничные условия для системы (9)–(11) имеют вид

$$I_{1|x=0} = I_0, \; I_{2|x=0} = 0, \; Q_{|x=0} = R_{|x=0} = 0. \qquad (12)$$

Из (9) легко получить первый интеграл движения

$$I_1 + 2I_2 = I_0, \qquad (13)$$

который представляет собой закон сохранения энергии в системе. Из (11) с учетом (9) и (13) получаем второй интеграл движения

$$R = \frac{\alpha}{2\gamma}I_2(3I_2 - 2I_0) - \frac{\gamma_1}{\gamma}I_2. \qquad (14)$$

Наконец, из (10) получаем третий интеграл движения

$$Q^2 = I_2\left[4I_0 - \left(8 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right)I_2 - 2\frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\alpha}{\gamma}I_2\left(I_0 - \frac{3}{2}I_2\right) - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\left(I_0 - \frac{3}{2}I_2\right)^2\right]. \quad (15)$$

Легко показать также, что существует еще один интеграл движения, связывающий все функции,

$$Q^2 + R^2 = 4I_1I_2, \quad (16)$$

который, в сущности, является следствием выражений (13)–(15). Подставляя (15) в (9), легко получить нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее пространственное изменение интенсивности света I_2 во втором световоде ННО:

$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}x} = \gamma\left\{I_2\left[4I_0 - \left(8 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right)I_2 - 2\frac{\gamma_1}{\gamma}\frac{\alpha}{\gamma}I_2\left(I_0 - \frac{3}{2}I_2\right)^2\right]\right\}^{1/2}. \quad (17)$$

Введем нормированные величины

$$y = \frac{I_2}{I_0}, \quad y_1 = \frac{I_1}{I_0}, \quad z = 2\gamma x, \quad a = \frac{\alpha I_0}{2\gamma}, \quad s = \frac{\gamma_1}{\gamma}. \quad (18)$$

Тогда решение уравнения (17) в квадратурах для функции $y(z)$ можно представить в виде

$$\int_0^y \mathrm{d}y\left(y\left\{1 - 2y - y\left[\frac{s}{2} + a\left(1 - \frac{3}{2}y\right)\right]^2\right\}\right)^{-1/2} = z. \quad (19)$$

Из (19) видно, что поведение решений определяется двумя параметрами – параметром нелинейности a и параметром различия констант связи s. Кроме того, из (19) следует, что интенсивность распространяющегося во втором световоде света y периодически изменяется от нуля до максимальной величины $y_{\max}$, которая определяется из уравнения

$$1 - 2y_{\max} - y_{\max}\left[\frac{s}{2} + a\left(1 - \frac{3}{2}y_{\max}\right)\right]^2 = 0, \quad (20)$$

причем в качестве решения данного уравнения выбирается положительный корень, ближайший к нулю. С ростом уровня возбуждения новые корни уравнения (20) не возникают. Появление пары действительных корней уравнения (20) свидетельствует о наступлении эффекта самозахвата, поэтому можно сделать вывод, что в данной системе при накачке в один из световодов явление самозахвата отсутствует. Последнее имеет место в случае ННО из двух световодов.

Отметим здесь, что явление самозахвата излучения предсказывалось для атомных систем [14–16], для атомно-молекулярных систем [17], для систем экситон-поляритонов в микрорезонаторах [18,19] и экспериментально наблюдалось в [20,21], Оно состоит в резком (практически скачкообразном) изменении амплитуды колебаний при изменении параметров системы либо уровня возбуждения.

В линейном пределе ($a = 0$) интенсивность света в световодах ответвителя определяется следующими выражениями:

$$y = \frac{I_2}{I_0} = \frac{4}{\kappa^2}\sin^2\frac{\kappa}{2}z, \quad y_1 = \frac{I_1}{I_0} = 1 - \frac{8}{\kappa^2}\sin^2\frac{\kappa}{2}z, \quad (21)$$

где $\kappa = \sqrt{8 + s^2}$. Таким образом, интенсивность света периодически перекачивается из первого световода во второй и третий, причем $y_{\max} = 4/\kappa^2$, $y_{1\,\min} = 1 - 8/\kappa^2$, а длина связи $L_0 = \pi/(2\gamma\kappa)$. Отсюда видно, что длина связи в трехканальном линейном ответвителе меньше длины связи ответвителя из двух таких же световодов.

Решение уравнения (20) показывает, что максимальная интенсивность света $y_{\max}$ во втором (третьем) световоде монотонно убывает от значения $y_{\max} = 4/\kappa^2$ до нуля с ростом параметра нелинейности a (с ростом уровня возбуждения с торца первого световода). Два других корня уравнения (20) являются комплексно сопряженными при любых соотношениях между параметрами s и a. Полагая $y_{\max}$ известным, эти корни можно представить в виде $y_{2,3} = \mu \pm \mathrm{i}\nu$, где

$$\mu = \frac{a_1 - y_{\max}}{2}; \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 + (y_{\max} - a_1)(3y_{\max} + a_1)};$$
$$a_1 = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{s}{2a}\right); \quad a_2 = \frac{4}{9}\left[\left(1 + \frac{s}{2a}\right)^2 + \frac{2}{a^2}\right]. \quad (22)$$

Тогда выражение (15) легко проинтегрировать, и мы получаем

$$y = y_{\max}\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,\frac{1 - \mathrm{cn}(3maz/2)}{(n_1 - n_2)\mathrm{cn}(3maz/2) + n_1 + n_2}, \quad (23)$$

где $\mathrm{cn}(x)$ – эллиптический косинус [22, 23] с модулем k, равным

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu(\mu - y_{\max}) + \nu^2}{\sqrt{[\mu(\mu - y_{\max}) + \nu^2]^2 + \nu^2 y_{\max}^2}}\right); \quad (24)$$

$$m = \{[\mu(\mu - y_{\max}) + \nu^2]^2 + \nu^2 y_{\max}^2\}^{1/2};$$
$$n_1 = \sqrt{(\mu - y_{\max})^2 + \nu^2}; \quad n_2 = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}. \quad (25)$$

Из (23) следует, что интенсивность излучения во втором световоде $y(z)$ периодически изменяется от нуля до $y_{\max}$. При этом длина связи $L_z = 2\gamma L$ выражается формулой

$$L_z = \frac{4}{3ma}K(k), \quad (26)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [22, 23].

3. Обсуждение результатов

На рис.2 представлена зависимость максимальной интенсивности $y_{\max}$, перекачиваемой из первого (накачиваемого) световода ННО во второй, от параметра нелинейности a для ряда значений параметра различия констант связи s. Видно, что с ростом a величина $y_{\max}$ быстро убывает, стремясь к нулю при $a \gg 1$.

Рост параметра различия констант связи s определяет значения $y_{\max}$ при $a = 0$, но не влияет на общий характер

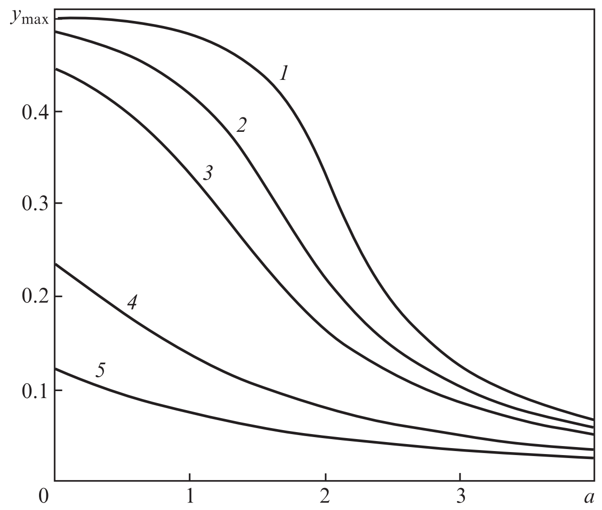

Рис.2. Зависимость максимальной интенсивности y_{max}, перекачиваемой из первого (накачиваемого) световода ННО во второй, от параметра нелинейности a для параметров различия констант связи $s = 0$ (*1*), 0.5 (*2*), 1 (*3*), 3 (*4*) и 5 (*5*).

поведения. Из рис.2 видно, что в трехканальной системе световодов отсутствует явление самозахвата.

На рис.3 представлена пространственная зависимость интенсивности $y(z)$, перекачиваемой из первого (накачиваемого) световода ННО во второй световод, от параметра a для нескольких значений параметра s. Видно, что имеет место периодический режим перекачки энергии распространяющегося излучения из первого световода в два других и обратно. При фиксированном параметре нелинейности a амплитуды колебаний функции $y(z)$ с ростом z монотонно убывают. Однако с ростом параметра нелинейности a амплитуды колебаний функции $y(z)$ увеличиваются. Положение максимумов обусловлено длиной связи L_z, которая, как видно из рис.2 и 4, зависит от уровня возбуждения.

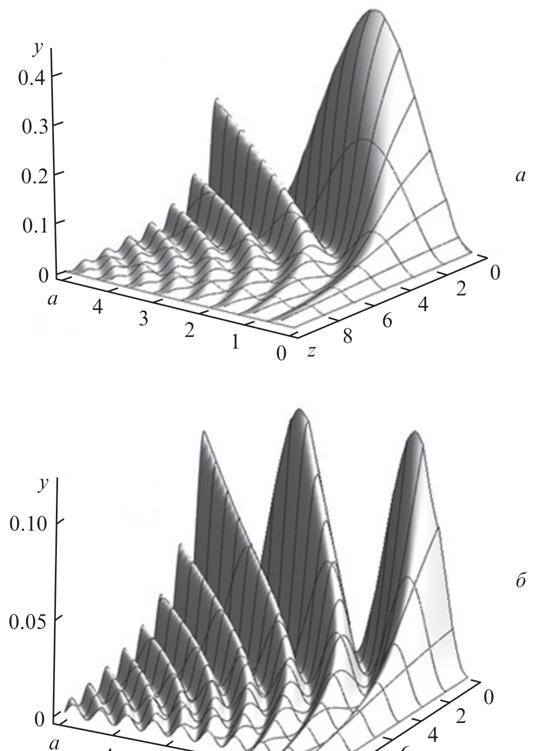

Рис.3. Пространственная зависимость интенсивности $y(z)$, перекачиваемой из первого световода во второй, от параметра нелинейности a для параметров различия констант связи s = 1 (*а*) и 5 (*б*).

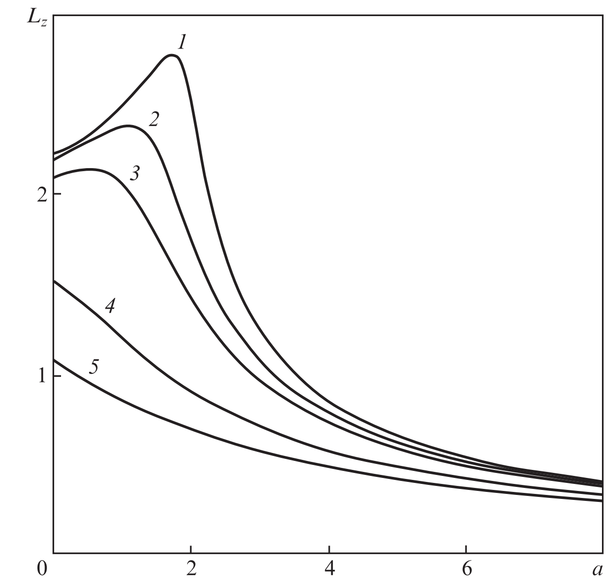

Рис.4. Зависимость длины связи L_z от параметра нелинейности a для параметров различия констант связи $s = 0$ (*1*), 0.5 (*2*), 1 (*3*), 3 (*4*) и 5 (*5*).

На рис.4 представлена зависимость длины связи L_z от параметра нелинейности a для нескольких значений параметра различия констант связи s. С ростом a функция $L_z(a)$ растет за счет роста модуля k полного эллиптического интеграла первого рода $K(k)$, тогда как при $a \gg 1$ длина связи L_z, как следует из выражения (26), убывает обратно пропорционально a. Из рис.4 также следует, что явление самозахвата в трехканальном ННО при больших уровнях возбуждения отсутствует.

Итак, отметим основные результаты. Получены точные аналитические решения системы нелинейных уравнений для интенсивностей распространяющихся волн в симметричном трехканальном ННО с керровской нелинейностью постоянной распространения и различными константами связи между световодами. Показано, что имеет место периодическая перекачка излучения из накачиваемого световода в два других и обратно; максимальная интенсивность излучения, перекачиваемая в соседние световоды, и длина связи быстро убывают с ростом уровня возбуждения; при больших уровнях возбуждения отсутствует явление самозахвата, характерное для двухканальных ННО.

1. Jensen S.M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-18**, 1580 (1982).
2. Майер А.А. *УФН*, **165**, 1037 (1995).
3. Chen Y. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-25**, 2149 (1989).
4. Chen Y., Snyder A.W., Payne D.N. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-28**, 239 (1992).
5. Майер А.А. *Квантовая электроника*, **18**, 1264 (1991).
6. Snyder A.W., Chen Y. *Opt. Lett.*, **14**, 517 (1989).
7. Schmidt-Hattenberger S., Trutschel U., Lederer F. *Opt. Lett.*, **16**, 294 (1991).
8. Soto-Crespo J.M., Wright E.M. *J. Appl. Phys.*, **70**, 7240 (1991).
9. Christodoulides D.N., Joseph R.I. *Opt. Lett.*, **13**, 794 (1988).

10. Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3383 (1998).
11. Peschel U., Pertsch T., Lederer F. *Opt. Lett.*, **23**, 1701 (1998).
12. Хаджи П.И., Орлов О.К. *ЖТФ*, **69**, 69 (1999); *Письма в ЖТФ*, **25**, 7 (1999).
13. Хаджи П.И., Орлов О.К. *Квантовая электроника*, **30**, 349 (2000).
14. Trombettoni A., Smezzi A. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 2353 (2001).
15. Raghavan S., Smerzi A., Fantoni S., Shenoy S.R. *Phys. Rev. A*, **59**, 620 (1999).
16. Buonsante P., Penna V., Vezzani A. *Phys. Rev. A*, **82**, 043615 (2010).
17. Зинган А.П., Хаджи П.И. *Оптика и спектроскопия*, **113**, 659 (2012).
18. Khadzhi P.I., Vasilieva O.F. *J. Nanoelectron. Optoelectron.*, **6**, 1 (2011).
19. Васильева О.Ф., Хаджи П.И. *Оптика и спектроскопия*, **115**, 922 (2013).
20. Anker T., Albiez M., Gati R., Hunsmann S., Eiermann B., Trombettoni A., Oberthalor M.K. *Phys. Rev. Lett*., **94**, 020403 (2005).
21. Bennet F.H., Alexander T.J., Haslinger F., Micthell A., Neshev D.N., Kivshar Y.S. *Phys. Rev. Lett*., **106**, 093901 (2011).
22. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: ГИФМЛ, 1965).
23. Журавский А.М. *Справочник по эллиптическим функциям* (М., Л.: Изд. АН СССР, 1941).