Модель дельта-слоя для границы плазменной полости, возбуждаемой в плазменном канале электронным сгустком или лазерным импульсом

Й.Томас, А.А.Голованов, И.Ю.Костюков, А.М.Пухов

Представлена аналитическая модель плазменной полости, возбуждаемой релятивистским электронным сгустком или мощным лазерным импульсом, движущимся в плазме, с учетом ограничивающего плазменную полость тонкого электронного слоя (дельта-слоя). Показано, что при расчете ускоряющих и фокусирующих полей электронный слой на границе полости можно рассматривать как двумерный и состоящий из поверхностных зарядов и токов, если его толщина достаточно мала. Проведено сравнение данной модели с моделью полости с конечной толщиной электронного слоя и показано, что область параметров, при которой наша модель справедлива, мала по сравнению с областью, где влияние конечной толщины существенно. С другой стороны, предлагаемая модель, являясь наиболее простой моделью плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме, позволяет осуществить переход к модели с конечной толщиной электронного слоя путем изменения масштаба координат.

Ключевые слова: *кильватерное ускорение, сильно нелинейный режим.*

1. Введение

Основными методами ускорения электронов в плазменной кильватерной волне являются ускорение в лазерном кильватере (laser wake-field acceleration, LWFA) [1] и ускорение в плазменном кильватере (plasma wake-field acceleration, PWFA) [2]. Наиболее эффективный режим лазерно-плазменного ускорения – это так называемый режим плазменной полости [3]. В этом режиме интенсивность лазера достаточно велика, что позволяет вытолкнуть все электроны плазмы из первого полупериода плазменной волны. При использовании метода PWFA также возможен режим плазменной полости, который достигается в случае плотного релятивистского электронного сгустка [4]. В обоих методах кильватерная волна, свободная от электронов и называемая плазменной полостью, окружает драйвер (сгусток или лазерный импульс, возбуждающий волну), движущийся с околосветовой скоростью сквозь плазму [5].

Ключевая особенность ускорения в режиме плазменной полости – генерация квазимоноэнергетичных электронных сгустков [6, 7], для которой необходимо подобрать правильную конфигурацию драйвера. Для достижения этой цели основными направлениями теоретического подхода являлась разработка аналитических моделей [8] и вывод законов подобия [9, 10], которые широко протестированы при трехмерном моделировании методом «частиц в ячейках» (particle-in-cell, PIC) [11]. До недавнего времени исследовалась лишь однородная фоновая плазма, но некоторые последние публикации посвящены ускорению электронов в плазме с полым плазменным каналом [8, 12–15]. В них рассмотрены аналитические модели для полей внутри и снаружи плазменной полости в плазме с произвольным радиальным профилем концентраций частиц. К настоящему времени эти модели предсказывают следующие преимущества использования профилированной плазмы: 1) независимый контроль над фокусирующей и ускоряющей силами [12]; 2) возможность регулирования длины истощения лазерного импульса и длины дефазировки, позволяющая улучшить прирост энергии электронов [13]; 3) добавление новых степеней свободы, которые помогают дополнительно регулировать измеряемые величины, такие как разброс по энергии частиц в электронном сгустке и доля захваченных частиц [13]; 4) компенсация дефокусировки релятивистского лазерного импульса [6, 16, 17]; 5) возможность инжекции предускоренного электронного сгустка, для которого нет необходимости подбора параметров под сильное фокусирующее поле [8]; 6) возможность инжектирования в плазменную полость электронного сгустка с таким профилем плотности, что он будет ускоряться в однородном продольном электрическом поле, в то время как на него не будет действовать фокусирующая сила (это позволит поддерживать малый эмиттанс и разброс по энергии в случае, если сгусток не достигает стенок [15]).

В некоторых из этих работ, основанных на использовании модели Лю [18], примененной к случаю плазменного канала, получены первые аналитические модели для полей внутри плазменной полости в плазменном канале с произвольным поперечным профилем концентраций. Эти поля зависят от радиуса огибающей плазменной полости r_b (расстояния между электронным слоем и осью драйвера), который определяется достаточно сложным обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от формы электронного слоя на границе полости. То, каким является профиль электронного слоя – прямо-

J.Thomas, A.M.Pukhov. Institut für Theoretische Physik I, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, D-40225 Germany
А.А.Голованов, И.Ю.Костюков. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Россия, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; e-mail: agolovanov@appl.sci-nnov.ru, kost@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 6 февраля 2017 г.

угольным [8, 18] или экспоненциальным [19], определяет окружающие полость поля, и это необходимо знать, в частности, при рассмотрении внешней инжекции электронных сгустков.

Во многих предшествующих работах (см., напр., [20, 21]), посвященных случаю однородной плазмы, влияние электронного слоя не учитывалось, в то время как форма полости предполагалась идеально сферической. Первые модели режима плазменной полости получены с использованием этого сильного приближения. В более детальной модели для поперечно-неоднородной плазмы Голованова и др. [14] показано, при каких условиях выбор распределений плотностей тока и зарядов в электронном слое не влияет на форму плазменной полости. В работе [14] также обсуждены области параметров, при которых уравнение для огибающей плазменной полости представимо в простом виде, и показано, что эти области подобны для подобных параметров существенно различных профилей электронного слоя.

Из настоящей работы следует, что одна из областей параметров эквивалентна изначальному предположению о том, что электронный слой имеет нулевую толщину, а плотности тока и заряда в нем могут быть представлены как двумерные распределения поверхностных плотностей. Сравнение с моделью с конечной толщиной электронного слоя показывает, что область параметров, для которых наше приближение справедливо, достаточно мала. Однако изменение масштаба продольной оси позволяет осуществить переход к модели, соответствующей другому предельному случаю плазменной полости, когда электроны в граничном слое являются релятивистскими. Поскольку последняя модель часто находится в хорошем согласии с PIC-моделированием, использование нашей модели в сочетании с изменением масштаба координат позволяет получить наиболее простую модель плазменной полости в плазме с поперечной неоднородностью.

В предлагаемой модели электронный отклик на заданный драйвер, распространяющийся в плазме вдоль продольной оси z, рассматривается в квазистационарном приближении, использование которого обусловлено тем, что все интересующие нас процессы происходят за времена, много меньшие характерного времени эволюции драйвера. Как следствие, мы полагаем, что поля зависят только от $\xi = ct - z$ [22]. В нашей модели координаты нормированы на обратное плазменное волновое число $k_{\rm p}^{-1} = c/\omega_{\rm p}$, скорости – на скорость света в вакууме c, заряды – на элементарный заряд $e > 0$, поля – на $E_0 = m_{\rm e} c\omega_{\rm p}/e$, а время – на $\omega_{\rm p}^{-1}$. Здесь $\omega_{\rm p}^2 = 4\pi e^2 n_0/m_{\rm e}$ – электронная плазменная частота, n_0 – определенная концентрация, на которую нормированы как электронная концентрация $n_{\rm e}(r)$, так и ионная плотность заряда $\rho_{\rm ion}(r)$. В частности, удобно предположить, что глубокий канал встроен в однородную плазму. В этом случае в качестве n_0 можно выбрать невозмущенную концентрацию однородной плазмы снаружи канала.

В следующем разделе представлена модель плазменной полости с дельта-слоем в заранее сформированном плазменном канале, после чего полученные результаты сравниваются с результатами в работе [14].

2. Модель дельта-слоя в плазменном канале

При разработке модели дельта-слоя для плазменной полости, возбуждаемой сгустком частиц в глубоком плазменном канале, следуя работе [8], разделим области с высокой концентрацией электронов (драйвер и ускоряемый сгусток) и области внутри полости, свободные от электронов (рис.1). В областях I (красный цвет) и III (черные точки) находятся драйвер и ускоряемый электронный сгусток соответственно. Поля в этих областях могут быть использованы для описания обратного воздействия границы плазменной полости на электронные сгустки и их возможную самомодуляцию. Области II (бледно-красный) и IV (синий) расположены снаружи драйвера и ускоряемого сгустка соответственно. В этих областях ток обоих сгустков влияет и на магнитное и на радиальное электрическое поле. Следует отметить, что разработанная нами теория будет также справедлива и в случае лазерного драйвера в областях, где отсутствует лазерный импульс, поскольку форма плазменной полости в сильно нелинейном режиме не зависит от типа драйвера.

Нормированная электронная плотность заряда (тока) в плазменной полости для релятивистских электронных сгустков, безразмерная продольная скорость которых примерно равна единице, записывается в виде

$$\rho_{\rm e} = J_{\rm e} = \begin{cases} 0, \ \xi < \xi_{\rm d}; \xi_{\rm d} + l_{\rm d} < \xi < \xi_{\rm b}; \xi > \xi_{\rm b} + l_{\rm b}, \\ J_{\rm d}(\xi, r), \ \xi_{\rm d} < \xi < \xi_{\rm d} + l_{\rm d}, r < R_{\rm d}, \\ 0, \ \xi_{\rm d} < \xi < \xi_{\rm d} + l_{\rm d}, r > R_{\rm d}, \\ J_{\rm b}(\xi, r), \ \xi_{\rm b} < \xi < \xi_{\rm b} + l_{\rm b}, r < R_{\rm b}, \\ 0, \ \xi_{\rm b} < \xi < \xi_{\rm b} + l_{\rm b}, r > R_{\rm b}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\xi_{\rm d,b}$ – координаты передних фронтов драйвера и ускоряемого сгустка соответственно; $l_{\rm d,b}$ и $R_{\rm d,b}$ – их длины и радиусы. Схема плазменной полости, которой соответствует распределение (1), показана на рис.1. Предполагается цилиндрическая симметрия задачи. Если электронный сгусток, возбуждающий полость, имеет бигауссово распределение с характерными продольным и

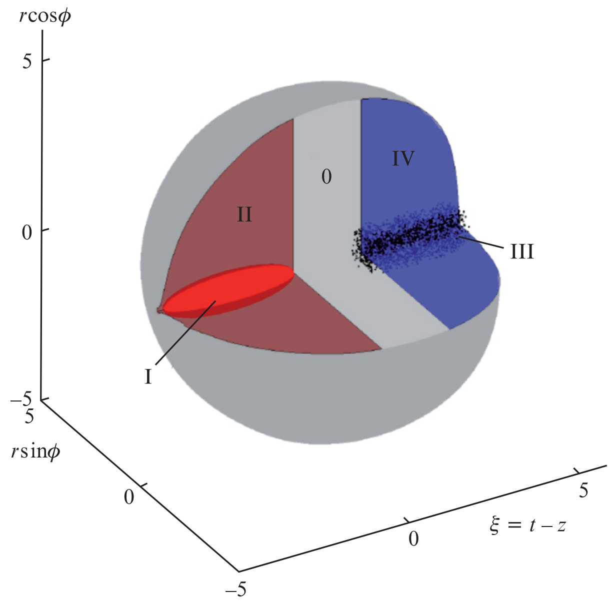

Рис.1. Разбиение плазменной полости на пять областей: область, в которой электронные сгустки отсутствуют (0); область внутри электронного сгустка, возбуждающего полость (драйвера) (I); область снаружи драйвера (II); область (точки) внутри ускоряемого электронного сгустка (III); область снаружи ускоряемого электронного сгустка (IV). Цветное изображение см. на сайте КЭ (http://www.quantum-electron.ru).

поперечным размерами σ_ξ и σ_r соответственно, пределы соответствуют $R_d \approx 3\sigma_r$ и $l_d \approx 3\sigma_\xi$.

Ионы из-за своей большой массы остаются неподвижными в интересующих нас временных масштабах, в то время как их плотность $\rho_{ion}(r)$ однородна по оси z. В перпендикулярном к оси z направлении $\rho_{ion}(r)$ зависит только от радиальной координаты r (расстояния до оси). Распределения плотности тока J_z и плотности заряда ρ разделены на три области: внутренняя часть плазменной полости, граничный слой и область снаружи полости. Поскольку эти плотности и поля равны нулю снаружи полости, ограничимся случаем $r \leqslant r_b$ и запишем

$$S(\xi,r) = J_z - \rho = s_{ion}(r) + s_0(\xi)\delta(r - r_b). \tag{2}$$

Этот источник внутри электронного слоя зависит только от ξ, а внутри плазменной полости ($r < r_b$) $S = S(r) = s_{ion}(r) = -\rho_{ion}(r)$.

Уравнение непрерывности в цилиндрической геометрии в квазистационарном приближении записывается как

$$\frac{r\partial(\rho - J_z)}{\partial\xi} + \frac{\partial(rJ_r)}{\partial r} = 0$$

и приводит к связи источников на границе плазменной полости и внутри нее:

$$s_0(\xi) = \frac{-c_0 - S_I(r_b(\xi))}{r_b(\xi)}, \tag{3}$$

где c_0 – произвольная постоянная. Здесь мы вводим интегральный источник $S_I(r) = \int_0^r s_{ion}(r')r'\mathrm{d}r'$ и наблюдаем первое отличие от [8, 14], где было необходимо определение относительной толщины границы плазменной полости.

Если потенциалы кильватера выражены в терминах векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ и кильватерного потенциала $\Psi = \varphi - A_z$, калибровка Лоренца $\partial(rA_r)/\partial r = -r\partial\Psi/\partial\xi$ позволяет получить нормированные уравнения Пуассона:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) = -J_z,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = -\rho + J_z. \tag{4}$$

Из второго уравнения получим наиболее общий вид кильватерного потенциала:

$$\Psi(\xi,r) = \int_0^r \frac{\mathrm{d}y}{y}\int_0^y xS(\xi,x)\,\mathrm{d}x + \Psi_0(\xi) = I(\xi,r) + \Psi_0(\xi). \tag{5}$$

Чтобы определить I и Ψ_0 в каждой области плазменной полости, начнем с самой простой, а именно области нейтральной плазмы. В ней $\Psi = 0$ и $r > r_b$, т.е. $\Psi_0 = -I$. Поскольку I является радиальным интегралом по всем внутренним областям, то $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1(\xi,r) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{r_b-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{y}\int_0^y xS(\xi,x)\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$I_2(\xi,r) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r_b-\varepsilon}^{r}\frac{\mathrm{d}y}{y}\int_0^y xS(\xi,x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$I_1 = \int_0^{r_b}\frac{S_I(y)}{y}\mathrm{d}y,\quad I_2(\xi,r) = -c_0\int_{r_b}^{r}\frac{\mathrm{d}y}{y} = 0, \tag{8}$$

тогда

$$\Psi_0(\xi) = -I_1 = \int_0^{r_b}\frac{S_I(y)}{y}\mathrm{d}y, \tag{9}$$

Внутри плазменной полости $I = \int_0^r S_I(\xi,y)y^{-1}\mathrm{d}y$. Подводя итог, имеем

$$\Psi(\xi,r) = -\int_r^{r_b}\frac{S_I(y)}{y}\mathrm{d}y \tag{10}$$

для $r \leqslant r_b$ и $\Psi(\xi, r) = 0$ для $r > r_b$. Если сравнить выражение (10) для кильватерного потенциала с найденным в [8], то видно, что они практически идентичны, за исключением того, что функция β в [8], зависящая от толщины электронного слоя, в (10) отсутствует. Поскольку радиальная компонента векторного потенциала в нашей теории

$$A_r(\xi,r) = r\sigma(\xi) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}\Psi_0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \tag{11}$$

также является производной от Ψ_0, то вычисления существенно упрощаются. Далее,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\xi} = \frac{S_I(r_b)}{2r_b}r_b'' + \frac{s_{ion}(r_b)}{2}(r_b')^2 - \frac{S_I(r_b)}{2r_b^2}(r_b')^2, \tag{12}$$

что приводит к следующему дифференциальному уравнению для огибающей плазменной полости:

$$A(r_b)r_b'' + B(r_b)(r_b')^2 + C(r_b) = \frac{\Lambda(\xi)}{r_b}. \tag{13}$$

Здесь $r_b'(\xi) = \mathrm{d}r_b(\xi)/\mathrm{d}\xi$; $r_b''(\xi) = \mathrm{d}^2r_b(\xi)/\mathrm{d}\xi^2$;

$$A = 1 - \frac{S_I}{2};\quad B = -\frac{s_{ion}(r_b)r_b}{2};\quad C = -\frac{S_I}{r_b}; \tag{14}$$

$$\Lambda(\xi) = -\int_0^{r_b} J_z(\xi,r')r'\mathrm{d}r' \tag{15}$$

является интегралом от продольной плотности тока, созданного электронными сгустками.

В более общей теории Голованова и др. [14] рассмотрено упрощенное дифференциальное уравнение для электронного слоя конечного размера с источником $S(r > r_b) = s_0(\xi)g[(r - r_b)/\Delta]$. Показано, что в общем случае существуют два приближения, в рамках которых решение этого дифференциального уравнения не зависит от толщины Δ и профиля g электронного слоя. Области применимости этих приближений оказываются подобными для различных профилей. Можно показать, что при использовании прямоугольного профиля электронного слоя $g(x) = \theta(1 - x)$, где $\theta(x)$ – степ-функция Хевисайда, при малых Δ отличие точных значений (полученных численно) коэффициентов A, B, C от их приближенных значений в рамках приближения бесконечно тонкого слоя малы (рис.2).

В целом, авторы [14] выделяют два класса приближений тонкого слоя: приближение бесконечно тонкого слоя и релятивистское приближение. В первом случае $\Delta \to 0$, так что справедливо соотношение $\Delta \ll |r_b/(S_I(r_b)M_1(0))|$, где

$$M_1(x) = \int_x^\infty yg(y)\,\mathrm{d}y. \tag{16}$$

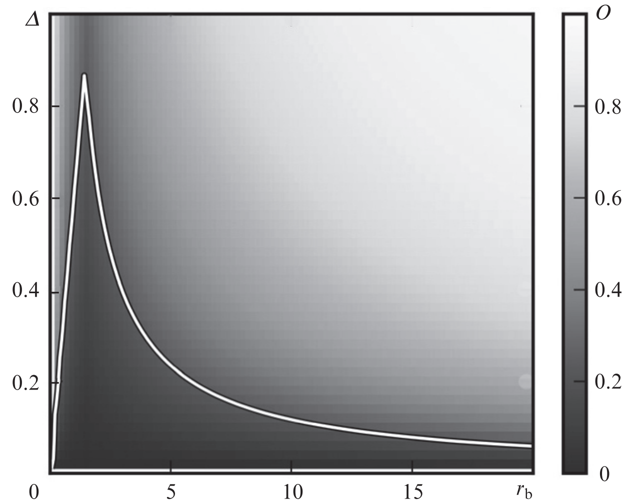

Рис.2. Максимальное относительное отличие O коэффициентов A, B и C, вычисленных в приближении бесконечно тонкого слоя, от их точных значений, полученных численно, в пространстве параметров r_b и Δ для прямоугольного профиля электронного слоя и случая однородной плазмы. Сплошная линия соответствует уровню 0.25.

Во втором случае выполняется соотношение $\Delta \gg |r_b/(S_I(r_b)M_I(0))|$, которое физически соответствует тому, что электроны в слое на границе полости являются релятивистскими (поэтому это приближение и называется релятивистским).

Если сравнить полученные в настоящей работе выражения для коэффициентов (14) с полученными в работе [14], то видно, что наше предположение о двумерности электронного слоя соответствует первому приближению (приближению бесконечно тонкого слоя). Наше предположение также эквивалентно выбору $g(x) = \delta(x)$, для которого $M_1(0) = 0$, и поэтому критерий $\Delta \ll |r_b/(S_I(r_b)M_I(0))|$ всегда выполнен.

Релятивистское приближение $\Delta \gg |r_b/(S_I(r_b)M_I(0))|$, $\Delta \ll r_b$, в котором коэффициенты $A = -S_I/2$ и $C = -S_I/(2r_b)$, не может быть получено в рамках нашего рассмотрения. Таким образом, область применимости приближения дельта-слоя ограничена областью параметров, показанных темным цветом на рис.2. Однако, поскольку для любого заданного значения Δ можно найти достаточно большой размер плазменной полости r_b, для которого релятивистское приближение будет выполнено, оно часто находится в хорошем соответствии с результатами PIC-моделирования. Поэтому имеет смысл найти способ преобразовать уравнение (13) с коэффициентами (14) в уравнение в релятивистском приближении, для которого $C = -S_I/(2r_b)$.

Такое преобразование возможно путем изменения масштаба продольной координаты $\xi \to \tilde{\xi}/\sqrt{2}$ и замены $r_b(\xi) \to r_b(\tilde{\xi})$ и $\Lambda(\xi) \to 2\tilde{\Lambda}(\tilde{\xi})$. Тогда $r_b'(\xi) \to \sqrt{2}\,r_b'(\tilde{\xi})$, $r''(\xi) \to 2r_b''(\tilde{\xi})$, и уравнение (13) для электронного слоя принимает вид

$$\left[1 - \frac{S_I(\tilde{\xi})}{2}\right] r_b''(\tilde{\xi}) - \frac{s_{ion}(\tilde{\xi})\, r_b(\tilde{\xi})}{2} (r_b'(\tilde{\xi}))^2 - \frac{S_I(\tilde{\xi})}{2r_b(\tilde{\xi})} = \frac{\tilde{\Lambda}(\tilde{\xi})}{r_b(\tilde{\xi})}, \quad (17)$$

что совпадает с результатом для релятивистского приближения в случае $|S_I| \gg 1$.

3. Заключение

В работе показано, что предположение о наличии бесконечно тонкого двумерного электронного слоя на границе плазменной полости соответствует нерелятивистскому пределу модели с электронным слоем конечного размера. Поскольку большая часть результатов PIC-моделирования соответствует релятивистскому приближению для электронного слоя конечного размера в [14], то наш подход допускает переход к более подходящей модели путем изменения масштаба оси ξ. Количественные отличия результатов, полученные с использованием нашей модели и модели с конечным размером слоя, показывают, что область параметров, для которой наша модель справедлива, мала. В то же время она является самой простой моделью плазменной полости в поперечно-неоднородной плазме.

Настоящая работа в рамках разработки аналитической модели частично поддержана РНФ (грант №16-12-10383 (И.Ю.К. и А.А.Г.), а также EU FP7 (проект EUCARD-2), Правительством РФ (проект №14.B25.31.0008) и Программой Президиума РАН «Экстремальное лазерное излучение: физика и фундаментальные приложения».

1. Tajima T., Dawson J.M. *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 267 (1979).
2. Chen P., Dawson J., Huff R., Katsouleas T. *Phys. Rev. Lett.*, **54** (7), 693 (1985).
3. Pukhov A., Meyer-ter Vehn J. *Appl. Phys. B*, **74**, 355 (2002).
4. Rosenzweig J., Breizman B., Katsouleas T., Su J. *Phys. Rev. A*, **44**, R6189 (1991).
5. Mora P., Antonsen T.M. Jr. *Phys. Rev. E*, **53**, R2068 (1996).
6. Leemans W.P. et al. *Nature Phys.*, **2**, 696 (2006).
7. Blumenfeld I. et al. *Nature*, **44**, 741 (2007).
8. Thomas J. et al. *Phys. Plasmas*, **23**, 053108 (2016).
9. Gordienko S., Pukhov A. *Phys. Plasmas*, **12**, 043109 (2005).
10. Pukhov A., Gordienko S. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **364**, 623 (2006).
11. Jansen O., Tückmantel T., Pukhov A. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **223**, 1017 (2014).
12. Schroeder C. B., Esarey E., Benedetti C., Leemans W. *Phys. Plasmas*, **20**, 080701 (2013).
13. Pukhov A. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 245003 (2014).
14. Голованов А.А., Костюков И.Ю., Пухов А.М., Томас Й. *Квантовая электроника*, **46**, 295 (2016).
15. Golovanov A.A., Kostyukov I.Yu., Thomas J., Pukhov A. *Phys. Plasmas*, **23**, 093114 (2016).
16. Sprangle P., Esarey E., Krall J., Joyce G. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2200 (1992).
17. Geddes C. et al., *Nature*, **431**, 538 (2004).
18. Lu W. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 165002 (2006).
19. Yi S.A., Khudik V., Siemon C., Shvetsa G. *Phys. Plasmas*, **20**, 013108 (2013).
20. Kostyukov I., Nerush E., Pukhov A., Seredov V. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 175003 (2009).
21. Thomas J., Pukhov A., Kostyukov I. Yu. *Laser and Particle Beams*, **32**, 277 (2014).
22. Mora P., Antonsen T.M. Jr. *Phys. Plasmas*, **4**, 217 (1997).