

# Туннельное приближение для оценки амплитуды генерации высших гармоник в интенсивных лазерных полях: анализ времен ионизации и рекомбинации

А.А.Минина, М.В.Фролов, А.Н.Желтухин, Н.В.Введенский

*В низкочастотном приближении анализируются квазиклассические уравнения для времен ионизации и рекомбинации, возникающие при анализе генерации высоких гармоник в квазиклассическом приближении. Основываясь на предположении о малости отношения времени подбарьерного движения атомного электрона  $\Delta t'$  к характерному периоду лазерного импульса  $T$ , построена формальная теория возмущений по параметру  $\Delta t'/T$  для вычисления времен ионизации и рекомбинации. Проанализирована точность построенной теории возмущений. На основе развитого подхода предложено расширение классической теории перерасеяния для линейной поляризации на случай полей с двумя пространственными компонентами.*

**Ключевые слова:** генерация высших гармоник, квазиклассическое приближение, сильное лазерное поле, аналитические теории.

## 1. Введение

Одним из наиболее часто используемых аналитических методов анализа нелинейных явлений, индуцированных сильным лазерным полем, является  $S$ -матричный подход [1–4]. В рамках этого подхода сильное лазерное поле учитывается точно, а по атомному (или молекулярному) потенциалу формально строят ряд теории возмущений. В результате такого разложения амплитуда процесса, индуцированного сильным лазерным полем, может быть представлена в виде интегралов от быстро осциллирующих функций. Например, в случае генерации высших гармоник (ГВГ) она может быть представлена в виде\*

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' f(t, t') \exp[iS_{\text{tot}}(t, t')], \quad (1)$$

$$S_{\text{tot}}(t, t') = S_{\text{cl}}(t, t') + \Omega t, \quad (2)$$

$$S_{\text{cl}}(t, t') = -\frac{1}{2} \int_{t'}^t [A(\xi) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t A(\xi') d\xi']^2 d\xi - I_p(t-t'), \quad (3)$$

где  $f(t, t')$  – некоторая гладкая функция;  $S_{\text{cl}}(t, t')$  – классическое действие частицы в лазерном поле;  $A(t)$  – вектор-

ный потенциал лазерного поля;  $\Omega$  – частота испущенного фотона;  $I_p$  – потенциал ионизации атомной мишени. Если несущая частота лазерного импульса много меньше потенциала ионизации  $I_p$ , то двумерный интеграл (1) с хорошей точностью можно оценить методом перевала [1–3, 5] и представить амплитуду ГВГ в виде суммы парциальных амплитуд  $A_j$ :

$$A = \sum_j A_j. \quad (4)$$

Каждая парциальная амплитуда  $A_j$  ассоциирована с  $j$ -й замкнутой траекторией (квантовой орбитой), определяемой временами начала движения ( $t_j'$ ) и возврата в начальную точку ( $t_j$ ) [1, 5]. С математической точки зрения, времена  $t_j'$  и  $t_j$  являются точками перевала подынтегральной функции (1), и соответствующая система уравнений для  $t_j'$  и  $t_j$  определяется равенством нулю первых производных по  $t$  и  $t'$  от фазовой функции подынтегрального выражения (1):

$$K'^2(t, t')/2 = -I_p, \quad (5a)$$

$$K^2(t, t')/2 = E, \quad (5b)$$

где

$$K'(t, t') = A(t') - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t A(\xi) d\xi, \quad (6a)$$

$$K(t, t') = A(t) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t A(\xi) d\xi \quad (6b)$$

и  $E = \Omega - I_p$ .

С физической точки зрения система уравнений (5) определяет квазиклассические условия реализации перехода из связанного состояния в состояние непрерывного спектра (5a) и из состояния непрерывного спектра в свя-

\* В работе используются атомные единицы.

А.А.Минина. Воронежский государственный университет, Россия, 394018 Воронеж, Университетская пл., 1

М.В.Фролов. Воронежский государственный университет, Россия, 394018 Воронеж, Университетская пл., 1; Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46

А.Н.Желтухин, Н.В.Введенский. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: vvved@appl.sci-nnov.ru

занное состояние с одновременным испусканием фотона с энергией  $\Omega$  (5б). Действительно, в квазиклассическом приближении переходы происходят в тот момент времени (в общем случае комплексный), для которого энергии начального и конечного состояний равны между собой [6].

Элементарный анализ системы уравнений (5) показывает, что решение системы возможно только на множестве комплексных чисел, а следовательно, соответствующая паре времен  $\{t'_j, t_j\}$  замкнутая траектория также комплексная. В большинстве случаев для физической интерпретации особенностей в спектрах ГВГ необходимо сопоставить комплексной траектории классическую (реальную) траекторию, которая находится из классического предела системы (5). Как правило, классический предел системы уравнений (5) определяют формальным пределом  $I_p \rightarrow 0$ . В случае линейной поляризации поля это означает, что электрон высвобождается из атома с нулевой начальной энергией, распространяется в лазерном поле по замкнутой классической траектории и, испустив фотон с энергией  $\Omega$ , образует связанное состояние. Очевидно, что система уравнений (5) в своем классическом пределе дает теоретическое обоснование классической модели перерассеяния [7, 8]. Напротив, в случае лазерных полей с двумя пространственными компонентами поля с различающимися проекциями электрического вектора на осях  $x$  и  $y$  предел  $I_p \rightarrow 0$  не позволяет найти замкнутую классическую траекторию, и в этом случае интерпретация спектров ГВГ в двухкомпонентных полях основывается на формализме незамкнутых траекторий (missed trajectories). В рамках такого формализма утверждается, что отсутствие замкнутых траекторий с нулевой начальной энергией вызывает эффективное подавление процесса рекомбинации электрона в ГВГ [9–13]. Существенным недостатком такой интерпретации является то, что рекомбинация – чисто квантовый процесс, и его вероятность зависит только от свойств атомной мишени.

В настоящей работе показано, что система уравнений (5) допускает предельные решения, которым соответствуют замкнутые классические (действительные) траектории в двухкомпонентном лазерном поле. Таким образом, интерпретация спектров ГВГ в двухкомпонентном лазерном поле (как и в случае линейного поля) может быть выполнена в рамках представления о замкнутых траекториях.

## 2. Анализ амплитуды ГВГ в туннельном пределе

Оценим выражение (1) с помощью последовательного вычисления интегралов по  $t'$  и  $t$  методом перевала. Хорошо известно, что в квазиклассическом приближении наибольший вклад дают только те траектории, которые определяются временами с минимальными мнимыми частями [1, 14]. Для нахождения таких траекторий выделим в явном виде реальную и мнимую части в  $t' = \bar{t}' + i\Delta t'$  и разложим уравнение (5а), определяющее точки перевала по  $t'$ , в ряд по  $\Delta t'$  до третьего порядка:

$$K'^2 + \kappa^2 + i\Delta t' \dot{K}'^2 - \frac{\Delta t'^2}{2} \ddot{K}'^2 - i \frac{\Delta t'^3}{6} \dddot{K}'^2 = 0, \quad (7)$$

где

$$\kappa^2 = 2I_p; \quad K' \equiv K'(t, \bar{t}'); \quad \dot{K}'^2 \equiv \frac{\partial K'^2}{\partial t'};$$

$$\ddot{K}'^2 \equiv \frac{\partial^2 K'^2}{\partial t'^2}; \quad \ddot{K}'^2 \equiv \frac{\partial^3 K'^2}{\partial t'^3}.$$

Заметим, что время подбарьерного движения электрона в низкочастотном поле, определяемое мнимой частью  $t'$ , может быть значительно меньше, чем характерный период лазерного импульса  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  – несущая частота [15–18]. Учитывая, что характерный порядок  $n$ -й производной в (7) пропорционален  $K'^2/T^n$ , нетрудно видеть, что каждый последующий член разложения в (7) относительно предыдущего имеет порядок малости  $\Delta t'/T$ . Таким образом, область применимости разложения (7) определяется отношением  $\Delta t'/T$ . Выделив мнимую и действительную части в уравнении (7), получим два связанных уравнения:

$$K'^2 + \kappa^2 - \frac{\Delta t'^2}{2} \ddot{K}'^2 = 0, \quad (8a)$$

$$\dot{K}'^2 - \frac{\Delta t'^2}{6} \ddot{K}'^2 = 0. \quad (8b)$$

Выразив из уравнения (8а)  $\Delta t'$  как

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + K'^2)}{\ddot{K}'^2}} \quad (9)$$

и подставив его в (8б), получим

$$\dot{K}'^2 - \frac{1}{3} \frac{(\kappa^2 + K'^2)}{\ddot{K}'^2} \ddot{K}'^2 = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) задает начальное (действительное) время движения по замкнутой траектории, а также определяет время подбарьерного движения (см. соотношение (9)). Второе слагаемое в (10) определяется временем подбарьерного движения и имеет квантовую природу, поэтому будем называть это слагаемое квантовой поправкой к условию на экстремум энергии в начальный момент  $\bar{t}'$ .

Исследуем качественно уравнение (10). Второе слагаемое как поправка к первому члену в нулевом приближении может быть опущено. Тогда уравнение (10) преобразуется к виду

$$\dot{K}'^2 = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет прозрачный физический смысл. А именно, оно определяет точки экстремума (минимума) энергии электрона в начальный момент движения по замкнутой траектории. Отметим, что в точке минимума вторая производная положительна ( $\ddot{K}'^2 > 0$ ), что, очевидно, обеспечивает положительное значение подкоренного выражения в (9). Таким образом, электрон начинает свое движение по замкнутой траектории в тот момент времени, когда его энергия в лазерном поле минимальна. Заметим, что в случае линейной поляризации условие (11) эквивалентно  $K' = 0$ .

При интегрировании (1) по  $t'$  методом перевала необходимо найти вторую производную фазовой функции в точке перевала:

$$\alpha(t) = \frac{\partial^2 S_{cl}(t, t')}{\partial t'^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial K'^2(t, t')}{\partial t'} \approx \frac{i}{2} \Delta t' \ddot{K}'^2, \quad (12)$$

а также выделить действительные и мнимые части в фазовой функции. Разложив  $S_{cl}$  (3) в ряд по  $\Delta t'$  до третьего слагаемого, получим

$$\begin{aligned} S_{cl}(t, t') &\approx S_{cl}(t, \bar{t}') + i \frac{\Delta t'}{2} (\mathbf{K}'^2 + \kappa^2) - \frac{(\Delta t')^2}{4} \dot{\mathbf{K}}'^2 - i \frac{(\Delta t')^3}{12} \ddot{\mathbf{K}}'^2 \\ &= S_{cl}(t, \bar{t}') + \frac{i}{3} \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \mathbf{K}'^2)}{\ddot{\mathbf{K}}'^2}} (\kappa^2 + \mathbf{K}'^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что при выводе (13) следует учитывать соотношение (11), а не (10), т. к. учет последнего приводит к превышению точности приближенных вычислений. В результате вычисления интеграла по  $t'$  получим

$$A = \sqrt{2\pi} \sum \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp[iS_{cl}(t, \bar{t}') + i\Omega t] dt, \quad (14)$$

где

$$g(t) = \frac{f(t, \bar{t}') \exp[-\Lambda^3(t, \bar{t}')/3F(t, \bar{t}')]}{\sqrt{\Lambda(t, \bar{t}')F(t, \bar{t}')}},$$

$$\Lambda(t, \bar{t}') = \sqrt{\kappa^2 + \mathbf{K}'^2}; \quad F(t, \bar{t}') = \sqrt{\frac{\ddot{\mathbf{K}}'^2}{2}}.$$

Сумма в (14) подразумевает суммирование по всем решениям уравнения (10) (для упрощения записи мы не вводим индекс, нумерующий эти решения).

Полагая, что предэкспоненциальная функция является медленно меняющейся функцией, оценим интеграл (14) методом стационарной фазы. Точки стационарной фазы находятся из решения уравнения

$$\frac{\mathbf{K}^2}{2} - \frac{1}{2}(\mathbf{K}'^2 + \kappa^2) \frac{d\bar{t}'}{dt} = E, \quad E = \Omega - I_p, \quad (15)$$

где  $\mathbf{K}(t) \equiv \mathbf{K}(t, \bar{t}')$ . Для нахождения производной  $d\bar{t}'/dt$  продифференцируем уравнение (11) по  $t$  и получим

$$\frac{d\bar{t}'}{dt} = -\frac{[\ddot{\mathbf{K}}'^2]_{t, \bar{t}'}}{\ddot{\mathbf{K}}'^2}, \quad (16)$$

где

$$[\ddot{\mathbf{K}}'^2]_{t, \bar{t}'} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{K}'^2}{\partial t \partial \bar{t}'}$$

В результате интегрирования по  $t$ , амплитуду  $A$  можно представить в виде

$$A = \sum_j a_j \exp(iS_{cl} + i\Omega \bar{t}_j), \quad (17)$$

где

$$a_j = \frac{2\pi}{i^{1/2}} \frac{f(\bar{t}_j, \bar{t}'_j)}{\sqrt{\Lambda_j F_j} \delta_j} \exp(-\Lambda_j^3/3F_j); \quad (18a)$$

$$\Lambda_j = \Lambda(\bar{t}_j, \bar{t}'_j); \quad F_j = F(\bar{t}_j, \bar{t}'_j); \quad (18b)$$

$$\delta_j = \mathbf{K}(\bar{t}_j, \bar{t}'_j) \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(\bar{t}_j, \bar{t}'_j)}{\partial \bar{t}_j} \right], \quad (18b)$$

а пара действительных времен  $\{\bar{t}_j, \bar{t}'_j\}$  является  $j$ -м решением системы уравнений

$$\dot{\mathbf{K}}'^2 - \frac{1}{3} \frac{(\kappa^2 + \mathbf{K}'^2)}{\ddot{\mathbf{K}}'^2} \ddot{\mathbf{K}}'^2 = 0, \quad (19a)$$

$$\mathbf{K}^2 + (\mathbf{K}'^2 + \kappa^2) \frac{[\ddot{\mathbf{K}}'^2]_{t, \bar{t}'}}{\ddot{\mathbf{K}}'^2} = 2E. \quad (19b)$$

Заметим, что результат (17) по виду совпадает с (4), однако в (4) суммирование выполняется по квантовым (комплексным) траекториям, а в (17) – по классическим (действительным) траекториям. Таким образом, выражение (17) есть представление амплитуды генерации гармоник посредством парциальных амплитуд, ассоциированных с классическими замкнутыми траекториями. В следующем разделе мы представим сравнение численных результатов, полученных с помощью систем (5) и (19) (ниже обозначены как «перевальные» и «туннельные» решения соответственно). Практический интерес представляют решения системы уравнений (19), в которой пренебрегается квантовыми поправками, т.е. удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\mathbf{K}}'^2 = 0, \quad (20a)$$

$$\mathbf{K}^2 = 2E \quad (20b)$$

(ниже обозначим эти решения как «классические»).

### 3. Численные результаты

Численные расчеты для пар времен  $t_j, t'_j$  и соответствующих им значений классического действия, определяющих амплитуду ГВГ, проводились для линейно поляризованного и бициркулярного полей. В случае линейной поляризации векторный потенциал имеет вид

$$A(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{R}(t) = \frac{F}{\omega^2} \exp\left(-2 \ln 2 \frac{t^2}{T^2}\right) \cos \omega t, \quad (21)$$

где  $F = e_x F$  – напряженность поля;  $\omega$  – несущая частота;  $T = 2\pi N/\omega$  – эффективная длительность импульса;  $N$  – число периодов поля. В случае бициркулярного поля векторный потенциал записывается в виде

$$A(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_2(t), \quad (22)$$

$$\mathbf{R}_i(t) = \frac{F}{\omega_i^2} \exp\left(-2 \ln 2 \frac{t^2}{T_i^2}\right) (e_x \cos \omega_i t + e_y \eta_i \sin \omega_i t), \quad (23)$$

где  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ ,  $T_i = 2\pi N/\omega_i$ ,  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = -1$ ,  $i = 1, 2$ . Численные расчеты были выполнены для несущей частоты  $\omega = 0.775$  эВ, интенсивности  $I = cF^2/(8\pi) = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $N = 3$ ,  $I_p = 13.65$  эВ. Характерные значения пондеромоторной энергии для линейно поляризованного поля  $u_p^{(lin)} = F^2 \times (4\omega^2)^{-1} = 23.9$  эВ и в случае бициркулярного поля  $u_p^{(bc)} = F^2 \times (2\omega_1^2)^{-1} + F^2/(2\omega_2^2) = 5F^2/(8\omega^2) = 59.76$  эВ. На рис.1 пред-

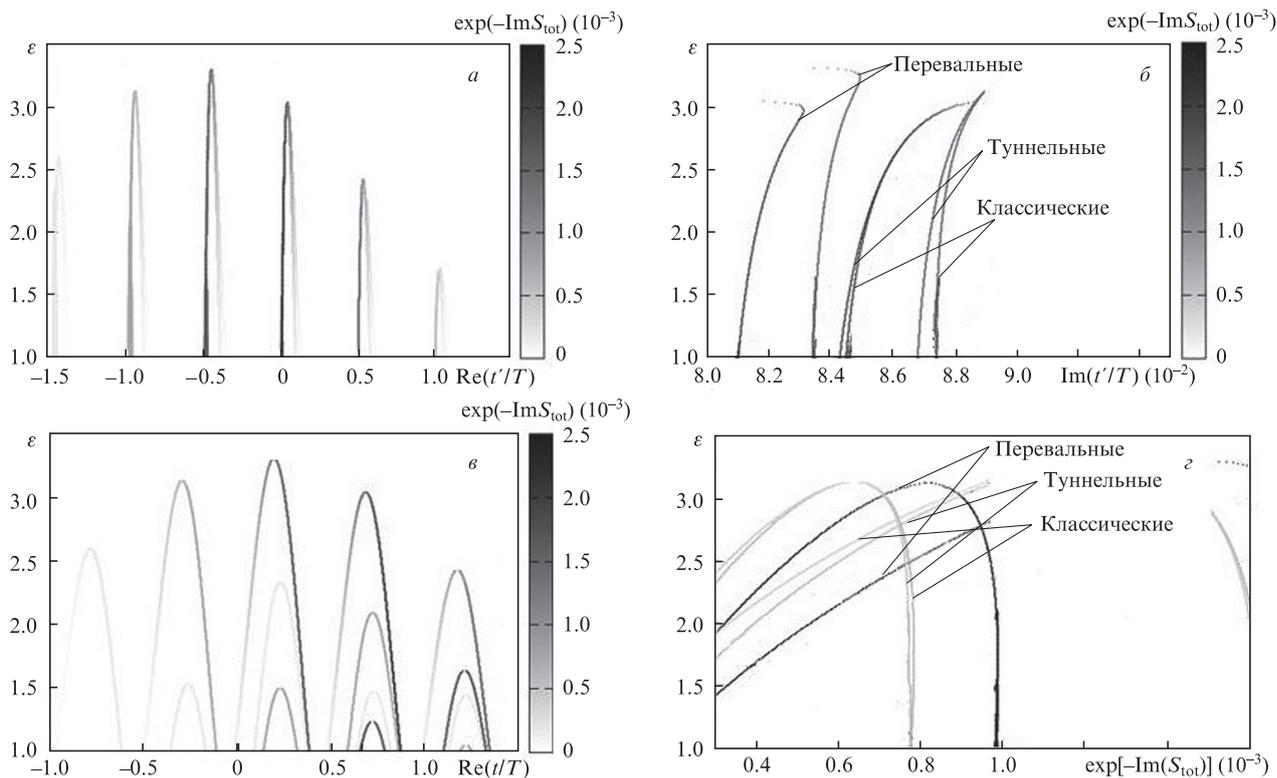


Рис.1. Зависимости  $\text{Re}(t'/T)$  (а),  $\text{Im}(t'/T)$  (б),  $\text{Re}(t/T)$  (в) и  $\exp(-\text{Im}S_{tot})$  (з) от приведенной энергии  $\epsilon = E/u_p^{(lin)}$  для линейно поляризованного лазерного поля. Кривые (а-в) имеют градиентную окраску в соответствии со значениями  $\exp(-\text{Im}S_{tot})$  (см.  $S_{tot}(t, t')$  в (2)). Решения, соответствующие системам (5) («перевальные»), (19) («туннельные») и (20) («классические») на рис.1,а и в не различимы. На рис.1,б и з представлены численные результаты для двух решений, определяющих наибольший вклад в амплитуду  $A$ .

ставлены результаты расчета для линейно поляризованного поля, на рис.2 – для бициркулярного поля.

Как видно из результатов расчетов (см. рис.1,а и 2,а), электрон высвобождается из атома каждые полпериода

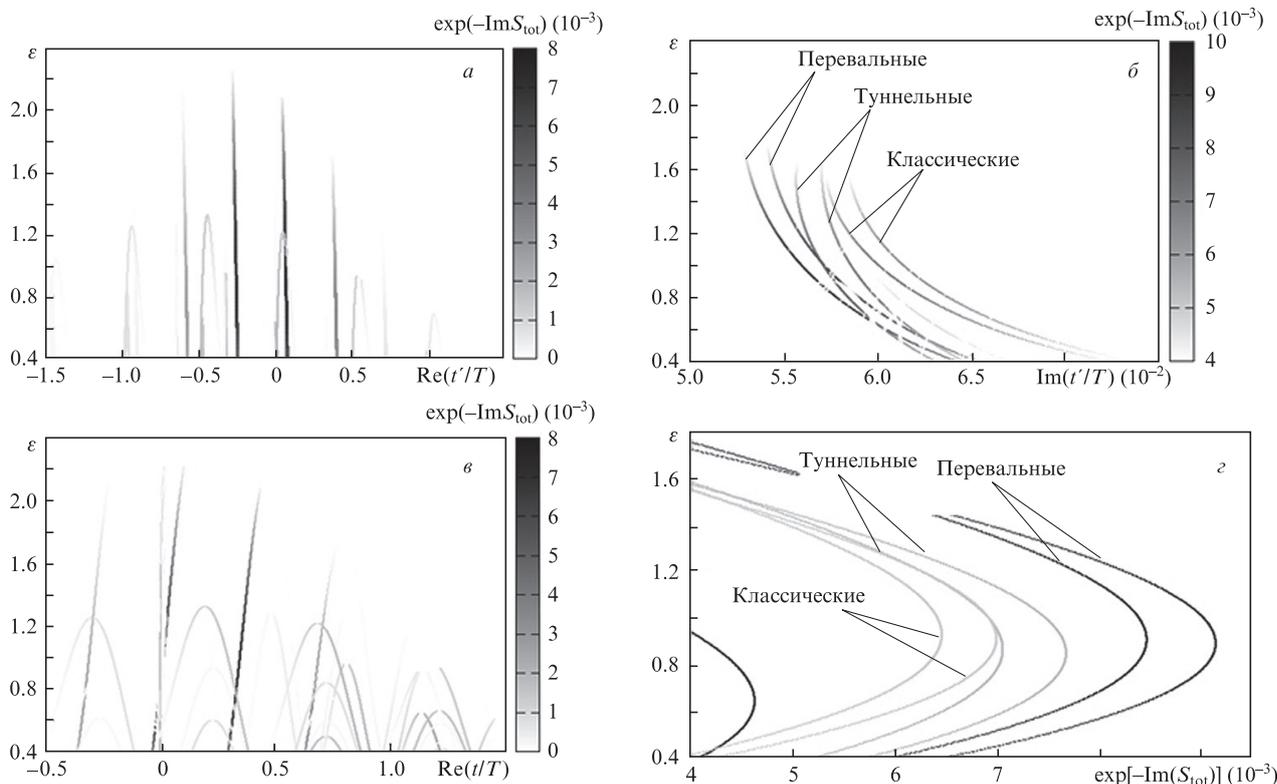


Рис.2. То же, что и на рис.1, но для бициркулярного поля. Приведенная энергия определена как  $\epsilon = E/u_p^{(bc)}$ .

для линейно поляризованного поля [5, 8] и каждую треть периода для бициркулярного поля [19, 20]. Очевидно, что процесс ионизации происходит наиболее эффективно во временном интервале, для которого пиковая напряженность соизмерима с максимальной в лазерном импульсе (в нашем случае этот интервал определяется как  $-T < t < T$ ). Отметим, что в случае линейной поляризации ионизация происходит практически в максимуме квадрата напряженности поля, тогда как в случае бициркулярного поля наблюдается значительный сдвиг от моментов времени, в которых квадрат напряженности поля максимален. Как показывает наш анализ, такой временной сдвиг обусловлен ненулевой начальной энергией в момент ионизации в бициркулярном поле.

В отличие от линейно поляризованного поля, для которого возврат к атомному остову с определенной энергией возможен с практически одинаковой вероятностью вдоль длинной ( $\bar{t}_j - \bar{t}'_j > 0.65T$ ) и короткой ( $\bar{t}_j - \bar{t}'_j < 0.65T$ ) траекторий [5] (см. рис.1,а), в случае бициркулярного поля возврат наиболее вероятен только вдоль короткой траектории ( $\bar{t}_j - \bar{t}'_j < 0.4T$ ) [19] (см. рис.2,а). Подавление движения вдоль длинной траектории вызвано предельно малой вероятностью выхода атомного электрона в континуум. Приведенный анализ показывает, что динамика электрона (процесс перерассеяния) в линейно поляризованном и бициркулярном полях существенно различна, поэтому выявление аналогий в процессах перерассеяния электрона в этих полях [21] при переходе во вращающуюся систему координат [22] не представляется состоятельным с физической и математической точек зрения.

Согласно численным результатам реальные части для времен рекомбинации, полученные из решения систем (5), (19) и (20), несущественно отличаются друг от друга. Проанализируем теперь результаты для мнимых частей  $t'$ , которые определяют мнимую часть действия  $S_{cl}(t, t')$ . На рис.1,б и г и рис.2,б и г представлены зависимости мнимой части  $t'$  и  $\exp(-\text{Im}S_{tot})$  от приведенной энергии  $E$ . Мнимые части  $t'$ , отвечающие на рис.1,б «классическим» и «туннельным» решениям, вычислялись с помощью соотношения (9) и действительных корней, полученных из решения систем уравнений (20) и (19). Отклонение двух решений от «перевального» не превышает 10%. Точность приближенных решений существенно падает в области энергий, в которой вторая производная  $S_{cl}(t, t')$  по  $t$  близка к нулю. Действительно, следуя определению  $S_{cl}(t, t')$  (см. (2)), имеем

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial t^2} = -\frac{\partial K^2}{\partial t}, \quad (24)$$

т.е. в этой области энергий реализуется экстремум (максимум) энергии частицы в момент возврата (перерассеяния)  $K^2$  (см., напр., максимумы на рис.1,а). В окрестности этих энергий наблюдается каустика «короткой» и «длинной» траекторий [23], а решение системы (5) кардинально меняется: например, мнимая часть времени  $t'$  испытывает резкий загиб (см. рис.1,б и 2,б), а значение мнимой части  $t'$  резко возрастает. В указанной области энергий решения находятся в окрестности линии Стокса [24] и небольшое изменение  $E$  приводит к скачкообразному изменению асимптотического поведения парциальной амплитуды  $A_j$  (определяемой парой решений  $\{t'_j, t_j\}$  на  $j$ -й ветке решения системы (5)), заключающемуся в смене осциллирующей (или более плавной) зависимости на резкое экспо-

нentially подобное затухание. Очевидно, что предложенный метод оценки амплитуды ГВГ и расчета времен  $\{t, t'\}$  не подходит для области каустики и требует специального рассмотрения [25–28]. Для малых энергий  $E$ , т.е. при  $\Omega \sim I_p$ , точность решений системы (20) значительно ухудшается. Действительно, в этом случае классический механизм обмена энергии электрона в континууме перестает быть доминирующим по сравнению с квантовым, поэтому квантовые поправки в этой области энергий оказываются существенными.

На рис.1,г и 2,г представлены зависимости  $\exp(-\text{Im}S_{tot})$  от приведенной энергии  $\varepsilon = E/u_p^{(lin)}$  (в случае линейной поляризации) и  $\varepsilon = E/u_p^{(bc)}$  (для бициркулярного поля). Качественно поведение  $\exp(-\text{Im}S_{tot})$  для всех трех типов решений одинаково. Более того, зависимость  $\exp(-\text{Im}S_{tot})$  от  $\varepsilon$  для «туннельных» и «классических» решений сводится к «перевальному» решению простым масштабированием: например, с высокой точностью можно считать, что  $\exp(-\text{Im}S_{tot})$  для «перевального» решения соответствует  $1.2 \exp(-\text{Im}S_{tot})$  для «туннельного» решения. Столь простое масштабирование двух результатов объясняется вкладом более высоких поправок по  $\Delta t'$  к мнимой части классического действия  $S_{cl}$ , однако их вычисление требует более высокой степени разложения уравнения (5а) в ряд по  $\Delta t'$  и выходит за рамки настоящей статьи.

## 4. Заключение

Предложен метод оценки амплитуды ГВГ атомами в интенсивном лазерном поле с двумя пространственными компонентами, основанный на анализе квазиклассических уравнений на моменты перехода связанного электрона в лазерно модифицируемый континуум и его последующей рекомбинации. Используя малость времени подбарьерного движения электрона по отношению к характерному периоду лазерного поля, показано, что возможно развитие формализма, в рамках которого амплитуда генерации гармоник может быть представлена в виде суммы парциальных амплитуд, ассоциированных с классическими замкнутыми траекториями. Получены классические уравнения и квантовые поправки к ним, определяющие классические (действительные) времена начала и окончания движения по замкнутым классическим траекториям. На примере линейно поляризованного и бициркулярного полей определена точность расчета времен ионизации и рекомбинации в рамках развитого формализма. Показано, что развитый формализм позволяет отказаться от физически необоснованной концепции «промахивающихся» траекторий при анализе генерации высоких гармоник и выполнить анализ в рамках замкнутых классических траекторий, как, например, в случае линейно поляризованного поля.

В заключение отметим, что представленный формализм потенциально может быть расширен на задачи о генерации гармоник с учетом кулоновского потенциала, например с помощью подхода, использующего модифицированные кулоновским взаимодействием классические траектории [18, 29, 30]. К настоящему времени учет кулоновского взаимодействия оптического электрона в генерации гармоник выполнен с помощью эвристического подхода [27, 31–33], однако точность и корректность такого обобщения требует дополнительных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-12-10033).

1. Salieres P., Carre B., Le Deroff L., Grasbon F., Paulus G.G., Walther H., Kopold R., Becker W., Milošević D.B., Sanpera A., et al. *Science*, **292**, 902 (2001).
2. Becker W., Grasbon F., Kopold R., Milošević D.B., Paulus G.G., Walther H. *Adv. At., Mol., Opt. Phys.*, **48**, 35 (2002).
3. Milošević D.B., Ehlötzky F. *Adv. At., Mol., Opt. Phys.*, **49**, 373 (2003).
4. Becker A., Faisal F.H.M. *J. Phys. B*, **38**, R1 (2005).
5. Lewenstein M., Balcou P., Ivanov M.Y., L'Huillier A., Corkum P.B. *Phys. Rev. A*, **49**, 2117 (1994).
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (М.: Наука, 1989).
7. Кучиев М.Ю. *Письма в ЖЭТФ*, **45**, 319 (1987).
8. Corkum P.B. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1994 (1993).
9. Kitzler M., Lezius M. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 253001 (2005).
10. Brugnera L., Frank F., Hoffmann D.J., Torres R., Siegel T., Underwood J. G., Springate E., Froud C., Turcu E. I.C., Tisch J.W.G., et al. *Opt. Lett.*, **35**, 3994 (2010).
11. Mairesse Y., Higuët J., Dudovich N., Shafir D., Fabre B., Mével E., Constant E., Patchkovskii S., Walters Z., Ivanov M.Y., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 213601 (2010).
12. Hutchison C., Houver S., Lin N., Hoffmann D.J., McGrath F., Siegel T., Austin D.R., Zaïr A., Salières P., Marangos J.P. *J. Mod. Opt.*, **61**, 608 (2014).
13. Hoffmann D.J., Hutchison C., Zaïr A., Marangos J. P. *Phys. Rev. A*, **89**, 023423 (2014).
14. Фейнман Р., Хибс А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (М.: Мир, 1968).
15. Гореславский С.П., Попруженко С.В. *ЖЭТФ*, **110**, 1200 (1996).
16. Попов В.С. *УФН*, **174**, 921 (2004).
17. Попов В.С. *Ядерная физика*, **68**, 717 (2005).
18. Popruzenko S. *J. Phys. B*, **47**, 204001 (2014).
19. Medišauskas L., Wragg J., van der Hart H., Ivanov M.Y. *Phys. Rev. Lett.*, **115**, 153001 (2015).
20. Milošević D.B. *Phys. Rev. A*, **92**, 043827 (2015).
21. Bandrauk A.D., Mauger F., Yuan K.-J. *J. Phys. B*, **49**, 23LT01 (2016).
22. Reich D.M., Madsen L.B. *Phys. Rev. A*, **93**, 043411 (2016).
23. Raz O., Pedatzur O., Bruner B.D., Dudovich N. *Nat. Phot.*, **6**, 170 (2012).
24. Хединг Д. *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)* (М.: Мир, 1965).
25. Frolov M.V., Manakov N.L., Sarantseva T.S., Starace A.F. *J. Phys. B*, **42**, 035601 (2009).
26. Frolov M.V., Manakov N.L., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **79**, 033406 (2009).
27. Frolov M.V., Manakov N.L., Popov A.M., Tikhonova O.V., Volkova E.A., Silaev A.A., Vvedenskii N.V., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **85**, 033416 (2012).
28. Frolov M.V., Knyazeva D.V., Manakov N.L., Geng J.-W., Peng L.-Y., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **89**, 063419 (2014).
29. Popruzenko S.V., Bauer D. *J. Mod. Opt.*, **55**, 2573 (2008).
30. Popruzenko S.V., Paulus G.G., Bauer D. *Phys. Rev. A*, **77**, 053409 (2008).
31. Frolov M.V., Manakov N.L., Sarantseva T.S., Emelin M.Y., Ryabikin M.Y., Starace A.F. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 243901 (2009).
32. Frolov M.V., Manakov N.L., Silaev A.A., Vvedenskii N.V. *Phys. Rev. A*, **81**, 063407 (2010).
33. Frolov M.V., Manakov N.L., Silaev A.A., Vvedenskii N.V., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **83**, 021405 (2011).