

Хаотические вихревые нити в конденсате Бозе–Эйнштейна и в сверхтекучем гелии

С.К.Немировский

Сформулирована постановка задачи квантовой турбулентности как в бозе-эйнштейновском конденсате (БЭК), так и в сверхтекучем гелии. В сверхтекучем гелии применяется так называемый метод вихревых нитей, в котором квантовые вихри представляются струнообразными объектами – вихревыми линиями. Динамика вихревых линий определяется детерминистскими уравнениями движения, дополненными случайными пересоединениями. В отличие от He II, законы динамики квантовых вихрей в БЭК основаны на нелинейном уравнении Шредингера. Это дает возможность получить микроскопическое описание столкновения вихрей, структуру вихревой нити и т. д. Проведен сравнительный анализ этих дополняющих друг друга подходов. Показано, что имеются некоторые особенности, не позволяющие автоматически переносить результаты, полученные для БЭК, на вихри в He II и наоборот.

Ключевые слова: бозе-эйнштейновский конденсат, квантовые вихри, сверхтекучая турбулентность, топологические дефекты.

1. Введение

Исследование квантовых вихрей, инициированное открытием сверхтекучести в жидком гелии, получило новый мощный импульс после обнаружения бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) для ультрахолодных атомных газов (см., напр., обзоры [1, 2]) и наблюдения нового типа квантовых жидкостей с параметрами, управляемыми в эксперименте. Критически важным обстоятельством является то, что, в отличие от сверхтекучего гелия, для БЭК имеется микроскопическая теория, описывающая динамику системы и, в частности, структуру и эволюцию квантовых вихрей. Теоретические аспекты динамики БЭК изложены в известной книге Питаевского и Стрингари [3]. В отечественной литературе следует отметить статьи Чаповского [4], Лихановой и др. [5], Тайченачева и др. [6].

Так же как и в сверхтекучем гелии, особое, возможно лидирующее, место занимают исследования вихревых состояний в БЭК, в частности изучение динамики хаотического клубка вихрей, или так называемой квантовой турбулентности (КТ). Наличие микроскопической теории и расширенные экспериментальные возможности делают БЭК более продвинутой системой, позволяющей глубже и основательнее исследовать проблемы КТ. Возникает, однако, вопрос, насколько результаты по хаотическим вихрям, полученные для БЭК, применимы для сверхтекучего гелия. В предлагаемой статье формулируется постановка задачи КТ как в БЭК, так и в сверхтекучем гелии (разд.2 и 3) и проводится сравнительный анализ различ-

ных подходов (разд.4). В Заключение обсуждается степень совместимости обоих подходов.

2. Квантовая турбулентность в сверхтекучем гелии

Основываясь на квантово-механических свойствах сверхтекучей жидкости, Фейнман [7] и Онзагер [8] предсказали, что вихревое движение He II реализуется очень специфическим способом. В частности, они предположили, что в гелии возникают одномерные особенности, или вихревые нити, на которых нарушается условие $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$. Вокруг этих особенностей возможно круговое движение, или циркуляция, сверхтекучего компонента гелия. Квантово-механические свойства сверхтекучей жидкости накладывают ограничения на круговое движение. Например, циркуляция скорости сверхтекучего компонента принимает только определенные, квантованные значения:

$$\int \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = j\kappa, \quad (1)$$

где интеграл вычисляется вдоль любого контура, охватывающего нить, а квант завихренности

$$\kappa = 2\pi\hbar/m_{\text{He}} = 9.97 \times 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}. \quad (2)$$

Поле завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}_s$ таково, что $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = 0$ вне линии и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \infty$ на ней. Формально поле завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}_s = \kappa \int ds \delta[\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi, t)], \quad (3)$$

где интегрирование происходит вдоль нити.

Таким образом, квантовые вихри ведут себя абсолютно идентично тонким вихревым трубкам, изучаемым в классической гидродинамике, за исключением того, что последние рассматриваются всего лишь как удобная и плодотворная математическая модель. Вихревую нить

С.К.Немировский. Институт теплофизики им. С.С.Кутателадзе СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 1; Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; e-mail: nemir@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 21 февраля 2018 г., после доработки – 19 марта 2018 г.

можно описать в параметрическом виде функцией $s(\xi, t)$, где s – радиус-вектор точки линии, а параметр ξ «пересчитывает» точки линии; часто величина ξ является длиной дуги (рис.1). Набор линий $\{s(\xi, t)\}$ эволюционирует, подчиняясь уравнениям движения и граничным условиям. Если известно поле завихренности $\omega(r)$, можно легко записать выражение для скорости элементов вихревой нити $\dot{s}_i(\xi, t)$, индуцированной вихревой линией. Это выражение с использованием закона Био–Савара будет иметь следующий вид:

$$\dot{s}_i(\xi, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[s(\xi', t) - s(\xi, t)] \times s'_{\xi'}}{|s(\xi', t) - s(\xi, t)|^3} d\xi'. \quad (4)$$

Кроме детерминистской эволюции, имеется еще один, стохастический элемент динамики – это случайные столкновения нитей друг с другом с последующим перезамыканием, или реконнекцией. Изучение вихрей и вихревой динамики в рамках описанной процедуры называется методом вихревых нитей (vortex filament method).

Термин «квантовая турбулентность» был введен Фейнманом в основополагающем труде [7], где он объяснил результаты работы Гортера и Меллинка [9]. Авторы этой работы наблюдали резкое увеличение перепада температуры в противотоке He II, когда скорость превышала определенное, достаточно небольшое значение. Фейнман связал кризис Гортера и Меллинка с появлением в системе неупорядоченного набора квантовых вихревых линий, или вихревого клубка, который оказывает сопротивление потоку нормального компонента, переносящему энтропию. Фейнман также предложил качественный сценарий развития вихревого клубка. В частности, он описал механизмы, приводящие к росту плотности вихревых нитей, и предложил законы распада вихревого клубка. Идеи Фейнмана были развиты в серии экспериментальных работ Вайнена, который построил феноменологическую теорию сверхтекучей турбулентности. Первое наглядное подтверждение идей Фейнмана было получено три десятилетия спустя в работе Шварца [10], продемонстрировавшего появление вихревого клубка при прямом численном моделировании. Пример вихревого клубка, развивающегося в противотоке He II из начально гладких (шести) вихревых колец, представлен на рис.2. Спустя еще почти три десятилетия была проведена серия экспериментов по визуализации потоков гелия, в которых авторы наблюдали массу неупорядоченных вихрей (см., напр., обзор [11]).

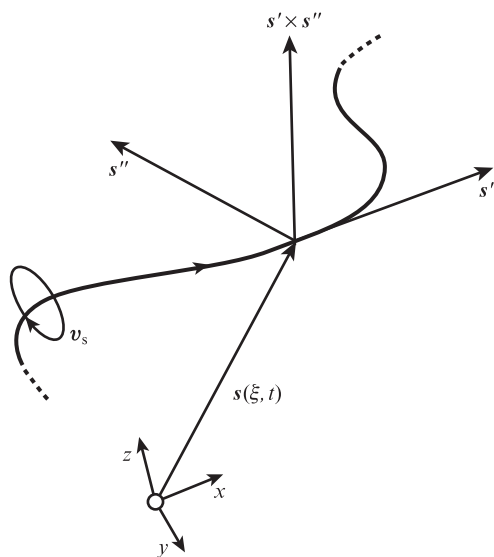


Рис.1. Схематическое изображение вихревой линии в произвольной системе координат. Каждая точка вихревой линии $s(\xi, t)$ определяется декартовыми координатами x, y, z и параметром ξ вдоль линии. Векторы s', s'' и $s' \times s''$ – это тангенциальный вектор, вектор локальной кривизны и вектор бинормали, совпадающий с направлением локально-индуцированной скорости \dot{s} точки вихревой линии $s(\xi, t)$.

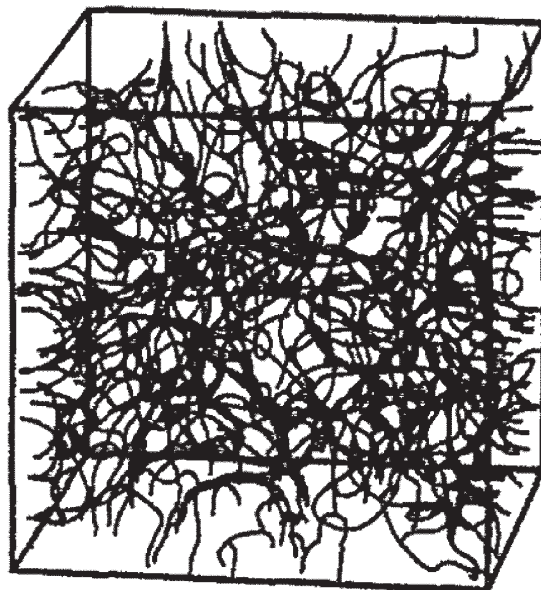


Рис.2. Вихревой клубок в противотоке He II (см. текст). Рисунок взят из работы [10] (рис.13).

В настоящее время теория КТ является активно развивающейся областью, имеющей множество приложений как в теории сверхтекучести, так и в других областях физики. В качестве примеров можно привести теории классической турбулентности [11–13], космических струн [14], дислокаций в твердых телах [15] и фазовых переходов [16]. Концепция КТ также используется при изучении кварк-глюонной плазмы [17] и в физике нейтронных звезд [18].

Еще одно обоснование интереса к КТ, привлекательное для теоретиков, состоит в том, что теория сверхтекучей турбулентности является элегантной задачей статистической физики набора струноподобных объектов с нелинейным и нелокальным взаимодействиями. Дополнительную сложность создают перезамыкания, приводящие к слиянию или расщеплению вихревых петель (см. обзор [19]).

Еще одно обоснование интереса к КТ, привлекательное для теоретиков, состоит в том, что теория сверхтекучей турбулентности является элегантной задачей статистической физики набора струноподобных объектов с нелинейным и нелокальным взаимодействиями. Дополнительную сложность создают перезамыкания, приводящие к слиянию или расщеплению вихревых петель (см. обзор [19]).

3. Квантовая турбулентность в конденсате Бозе–Эйнштейна

Из-за отсутствия строгой микроскопической теории для He II результаты, относящиеся к вихрям в сверхтекучем гелии, имеют феноменологический характер. Это касается уравнения движения, структуры ядра, процедуры пересоединения и т.д. Поэтому существуют различные искусственные рецепты, например такие, как «gconnection ansatz» [19]. В отличие от этого законы динамики для вихрей в БЭК основаны на уравнении Гросса–Питаевского (УГП) для макроскопической волновой функции $\psi(r, t)$, которое есть не что иное, как вариант нелинейного уравнения Шредингера. УГП было использовано для изуче-

ния турбулентности разными авторами (см. обзорную статью [20]). В связи с этим многие из перечисленных проблем имеют решения, которые широко используются для интерпретации подобных явлений в сверхтекучем гелии.

Следуя работе [21], запишем УГП для макроскопической волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ в виде

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -(\Lambda + i) \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi^*}. \quad (5)$$

Функционал свободной энергии $H\{\psi\}$ Гинзбурга–Ландау представим в виде

$$H\{\psi\} = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m^2} |\nabla \psi|^2 - \frac{\mu}{m} |\psi|^2 + \frac{U_0}{2m} |\psi|^4 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 \right]. \quad (6)$$

Слагаемое с коэффициентом Λ описывает релаксационные процессы при конечных температурах, и, следовательно, эволюция должна иметь диссипативный характер. В выражение для энергии системы введен внешний потенциал (например, потенциал удержания атомов БЭК в ловушке) $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Величина $U_0 = \int U(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ является амплитудой взаимодействия двух частиц ($U(\mathbf{r})$ – реальный двухчастичный потенциал взаимодействия атомов). В этом случае химический потенциал $\mu = nU_0$ (n – концентрация частиц в конденсате).

Вихревые линии (точнее, центральные линии вихря) являются геометрическим местом точек пересечения поверхностей $\text{Re}\psi(\mathbf{r}, t) = 0$ и $\text{Im}\psi(\mathbf{r}, t) = 0$ (рис.3). Таким образом, проследив эволюцию нулей функции $\psi(\mathbf{r}, t)$, можно описать эволюцию вихрей. Из-за того что вихревые линии являются совокупностью точек обращения в нуль макроскопической волновой функции, они также называются топологическими дефектами.

Уравнение Гросса–Питаевского соответствует случаю слабых внешних возмущений и асимптотически слабым атомным взаимодействиям. Поэтому при описании турбулентности (что соответствует сильным возмущениям) это уравнение может обеспечить только качественные результаты. Общая картина, которая следует из чис-

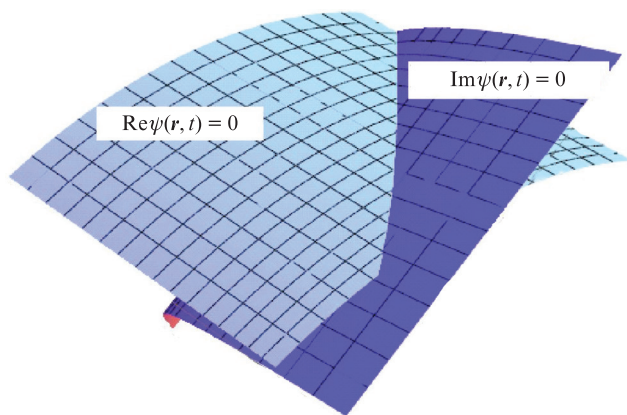


Рис.3. Схематическое изображение вихревой линии как топологического дефекта. Вихревая линия представляет собой геометрическое место точек, где значения макроскопической волновой функции (ее реальной и мнимой частей) обращаются в нуль. Цветной вариант рис.1 помещен на сайте нашего журнала <http://www.quantum-electron.ru>.

ленного моделирования УГП, выглядит следующим образом. При сильных возмущениях появляются квантовые вихри, которые эволюционируют, сталкиваются, соединяясь друг с другом (или расщепляясь), и в результате образуют запутанный вихревой клубок. Затухание турбулентности происходит вследствие появления волн Кельвина и фононного излучения. Важность пересоединения вихрей была подчеркнута Свистуновым [22]. Численное моделирование на основе УГП рассмотрено Кобаяши и др. [23].

Метод создания сильно неравновесных состояний атомов был разработан Юкаловым (см., напр., [24, 25]). Идея этого метода состоит в том, чтобы модулировать потенциал ловушки посредством нестационарного, неоднородного и анизотропного возмущения. При вращении ловушки с обычной скоростью должны возникать отдельные вихри. При большей скорости вращения появляется множество вихрей, которые образуют решетку Абрикосова. В противоположность этому, если нестационарное поле модулирующее потенциал ловушки, как и в методе Юкалова [24–26], не имеет фиксированной оси вращения, то создаются вихри и антивихри, случайным образом расположенные в пространстве, так что вихревая система становится смесью таких случайных вихрей [27]. Главная идея заключается в том, что возмущающий переменный потенциал не имеет единственной фиксированной оси вращения. Например, модулируемое поле может иметь две диэлектрические оси. Также возможно вместо модуляции потенциала ловушки модулировать атомную длину рассеяния, используя методы резонанса Фешбаха с осциллирующим магнитным полем [25, 2].

В случае приложения внешнего переменного потенциала к ловушке бозе-конденсированных атомов генерируется множество когерентных топологических мод, которые распадаются на вихри с квантованной завихренностью, поскольку они являются наиболее энергетически устойчивыми модами [29]. Когда число генерируемых вихрей становится достаточно большим, они образуют случайный клубок, типичный для КТ. Экспериментальная генерация КТ захваченных бозе-газов с помощью нестационарной модуляции потенциала ловушки была реализована группой Баньято [30]. Метод визуализации вихревых нитей в слабо взаимодействующих газах Бозе–Эйнштейна заключается в измерении оптической плотности, при этом линии с аномально низкой плотностью ассоциируются с вихревыми нитями (рис.4). Описание всех

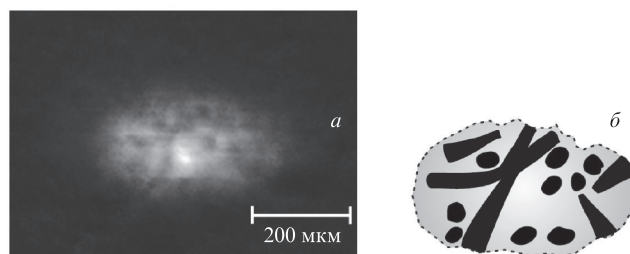


Рис.4. Атомная оптическая плотность в БЭК после его свободного расширения в течение 15 мс, демонстрирующая наличие вихревых структур (темные области; вихревые нити распространились по всему образцу, они напоминают режим вихревого клубка) (а) и схематическая диаграмма, показывающая распределение вихрей, которая получена из изображения на рис.4,а (б). Рисунок взят из работы [30].

динамических режимов, начиная от равновесного бозе-газа до создания отдельных вихрей, а затем генерации КТ, дано в работах [30, 31].

4. Сравнительный анализ двух подходов

Один из ключевых вопросов состоит в том, насколько идентичны два рассматриваемых подхода и можно ли пользоваться результатами, полученными для БЭК, для объяснения результатов в случае сверхтекучего гелия и наоборот. Как обсуждалось ранее, ввиду отсутствия строгой микроскопической теории для He II выводы, касающиеся динамики вихрей в сверхтекучем гелии, имеют феноменологический характер. В отличие от этого законы динамики для вихрей в БЭК основаны на широко применяющейся теории Гросса–Питаевского. Поэтому многие проблемы вихревой динамики в БЭК имеют решения, которые могут быть использованы (с некоторыми оговорками) для интерпретации подобных явлений в сверхтекучем гелии [32].

Представление вихревых нитей в гелии в виде бесконечно тонких линий дает неоспоримое преимущество, связанное с компьютерными вычислениями. Действительно, в случае трехмерных вычислений при выбранном шаге пространственного разбиения, или связанном с ним числе узлов N компьютерные затраты растут как N^3 в случае БЭК. В то же время при исследовании динамики вихревых линий в сверхтекучем гелии компьютерные затраты растут гораздо медленнее, а именно как $N \ln N$. Это позволяет рассчитывать очень плотные вихревые клубки. Далее, тот факт, что квантовые вихри в сверхтекучем гелии являются линейными сингулярностями, очень важен также с точки зрения приложений для других систем, например для вакансий в твердых телах или для космических струн.

В отличие от сверхтекучего гелия, где размер ядра порядка межатомных расстояний, в слабоидеальном бозегазе радиус сердцевин a_0 гораздо больше. С помощью уравнений (5) и (6) можно определить структуру ядра вихревой нити. Вблизи центральной линии вихря плотность сверхтекучего компонента возрастает от нуля и на размере порядка a_0 становится равной равновесному значению. Иными словами, квантовые вихри в БЭК, в отличие от He II (где они могут считаться бесконечно тонкими линиями), являются трубками с размером

$$a_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mn}U_0}. \quad (7)$$

В результате при численных исследованиях КТ в сверхтекучем гелии такие величины, как характерный размер вычислительного объема D , типичное расстояние между линиями и радиус ядра a_0 , чрезвычайно разнесены в пространстве масштабов. Например, в типичных численных исследованиях размер вычислительного объема составляет ~ 1 см, межвихревое расстояние – порядка 10^{-3} – 10^{-4} см, а размер ядра a_0 в гелии – около 10^{-8} см, поэтому тотальное различие масштабов составляет восемь порядков. При численном моделировании БЭК оно существенно меньше. Например, в работах Кобаяши и Цубота [23] размер вычислительного объема $D \approx 10^{-3}$ см, тогда как размер ядра был равен $\sim 10^{-5}$ см. Таким образом, эти размеры различаются только на два порядка. Данное количественное различие приводит к сильным качественным различиям. Конечно, можно выбрать такие параметры в

УГП, чтобы формально задача соответствовала случаю сверхтекучего гелия. Однако при этом потребуется рекордное количество вычислений (на сетке примерно 100000^3), что, разумеется, нереально.

Различие в толщинах ядер вихрей сказывается на законах движения. Например, поскольку размер ядра в БЭК не очень мал по сравнению с обратной кривизной линии, то, в отличие от случая He II, скорость центральной линии может быть непропорциональна ее кривизне.

Еще одно важное различие между He II и БЭК состоит в том, что последний является существенно сжимаемым газом. Линеаризованные уравнения (5) и (6) дают для малых возмущений плотности решение в виде звуковых волн, распространяющихся со скоростью звука

$$c = \sqrt{\frac{U_0 n}{m}}. \quad (8)$$

Скорость линейных элементов вихревой нити не очень мала по сравнению со скоростью звука. Действительно, из выражений (7) и (8) следует, что скорость звука $c \approx \kappa/a_0$, а скорость элементов линии $v_{\text{line}} = \kappa/\delta$, где δ – характерное межвихревое расстояние. Поэтому число Маха $M = v_{\text{line}}/c = a_0/\delta$ не очень мало (по сравнению с его значением в случае гелия). Это означает, что даже крупномасштабные движения нити излучают звук. В He II данный процесс имеет место только для чрезвычайно малых масштабов. В связи с этим условие распада вихревой структуры в БЭК, связанное с излучением звука, гораздо более слабое. В результате значительно уменьшается кинетическая энергия, связанная с вихрями, и изменяется распределение обычной (незвуковой) энергии в k -пространстве (энергетический спектр).

Далее, из-за «толстого» вихревого ядра вихри в БЭК во время пересоединения теряют значительно большую часть своей вихревой энергии, испуская ее в виде фононов (из-за «толстого» вихревого ядра и малой скорости звука). Так, например, недавние расчеты [33] показали, что пересоединение сопровождается излучением звуковых волн с длиной волны порядка радиуса сердцевин a_0 . В сверхтекучем гелии потерями энергии во время реконнекции можно пренебречь.

Помимо описанных различий между сверхтекучим гелием и БЭК имеются такие особенности, как, например, неоднородность последнего, связанная с наличием ловушек, а также сравнительно малое число атомов.

5. Заключение

Таким образом, было продемонстрировано, что количественное различие в параметрах квантовых вихрей приводит к сильным качественным различиям. В частности, для БЭК существенна сжимаемость, вихри не являются «стрингами» и важна динамика внутри ядра вихревых трубок. Свойство сжимаемости делает невозможным, например, сравнение результатов по КТ с результатами теории Колмогорова для классической турбулентности. То, что в БЭК вихри не являются струнообразными объектами, не позволяет применить результаты, полученные в случае БЭК, для других систем с линейными типологическими дефектами, в частности для дислокаций или для космических струн. Конечная толщина ядра вихря приводит также к разной динамике вихревых трубок в сверхтекучем гелии и в БЭК.

Часто утверждается, что можно поступить абсолютно формально и выбрать в УГП величину U_0 очень большой, такой, чтобы размер ядра вихря a_0 был, напротив, мал и задача соответствовала бы случаю сверхтекучего гелия. Однако, на наш взгляд, такой подход является некорректным. Фундаментальная причина состоит в том, что в данном случае, в соответствии с формулами (7) и (8), необходимо константу взаимодействия U_0 устремить к бесконечности. Но при этом система, конечно, перестает быть слабозадействующей, и теория Гросса–Питаевского становится неприменимой. Далее, данную процедуру невозможно осуществить и в экспериментальных исследованиях, поскольку параметры системы задаются свойствами газа. В численных исследованиях, как упоминалось выше, в этом случае потребуются рекордный объем вычислений, превышающий возможности любых современных компьютеров.

Предостережения, высказанные выше, показывают, что любые результаты (как численные и экспериментальные, так и аналитические), полученные для БЭК, не могут быть автоматически применены к случаю сверхтекучего гелия и наоборот. В то же время раздельное исследование не исчерпывает всех научных проблем. Представляется, что наиболее оптимальным вариантом является комбинирование двух описанных подходов, дополняющих друг друга.

Работа выполнена при поддержке гранта №14-29-00093 Российского научного фонда.

- Ketterle W. *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1131 (2002).
- Онофрио Р. *УФН*, **186**, 1229 (2016).
- Pitaevskii L.P., Stringari S. *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, 2003).
- Чаповский П.Л. *Письма в ЖЭТФ*, **95**, 148 (2012) [*JETP Lett.*, **95**, 132 (2012)].
- Лиханова Ю.В., Медведев С.Б., Федорук М.П., Чаповский П.Л. *Квантовая электроника*, **47**, 484 (2017) [*Quantum Electron.*, **47**, 484 (2017)].
- Тайченачев А.В., Юдин В.И., Багаев С.Н. *УФН*, **186**, 193 (2016).
- Feynman R.P., in *Progress in Low Temperature Physics. I* (Amsterdam, 1955, p. 17).
- Onsager L. *Nuovo Cimento*, **6**, 279 (1949).
- Gorter C.J., Mellink J.H. *Physica*, **15**, 285 (1949).
- Schwarz K.W. *Phys. Rev. B*, **4**, 2398 (1988).
- Vinen W. *J. Low Temp. Phys.*, **161**, 419 (2010).
- Немировский С.К. *ЖЭТФ*, **84**, 1729 (1983) [*Sov. Phys. JETP*, **57**, 1009 (1983)].
- Nemirovskii S. *J. Low Temp. Phys.*, **71**, 504 (2013).
- Copeland E.J., Kibble T.W.B., Steer D.A. *Phys. Rev. D*, **58**, 043508 (1998).
- Nabarro F. *Theory of Crystal Dislocations* (Oxford: Clarendon Press, 1967).
- Kleinert H. *Gauge Fields in Condensed Matter Physics* (Singapore: World Scientific, 1990).
- Davidson M. *Physica E*, **42**, 317 (2010).
- Melatos A., Peralta C. *Astrophys. J. Lett.*, **662** (2), L99 (2007).
- Nemirovskii S.K. *Phys. Rep.*, **254**, 85 (2013).
- Lvov Y., Nazarenko S., West R. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **184**, 333 (2003).
- Питаевский Л.П. *ЖЭТФ*, **40**, 646 (1961) [*Sov. Phys. JETP.*, **13**, 451 (1961)].
- Svistunov B.V. *Phys. Rev. B*, **52**, 3647 (1995).
- Kobayashi M., Tsubota M. *Phys. Rev. A*, **76**, 045603 (2007).
- Yukalov V.I., Yukalova E.P., Bagnato V.S. *Phys. Rev. A*, **56**, 4845 (1997).
- Yukalov V., Bagnato V. *Laser Phys. Lett.*, **6**, 399 (2009).
- Yukalov V.I., Marzlin K.-P., Yukalova E.P. *Phys. Rev. A*, **69**, 023620 (2004).
- Yukalov V. *Laser Phys. Lett.*, **7**, 467 (2010).
- Ramos E.R.F., Henn E.A.L., Seman J.A., et al. *Phys. Rev. A*, **78**, 063412 (2008).
- Yukalov V. *Phys. Part. Nucl.*, **42**, 460 (2011).
- Henn E.A.L., Seman J.A., Roati G., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 045301 (2009).
- Seman J.A., Henn E.A.L., Shiozaki R.F., et al. *Laser Phys. Lett.*, **8**, 691 (2011).
- Nemirovskii S.K. *Theor. Math. Phys.*, **141**, 1452 (2004).
- Leadbeater M., Winiecki T., Samuels D.C., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 1410 (2001).