КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Рекуррентный метод решения обратной задачи статистики фотоотсчетов

П.П.Гостев, С.А.Магницкий, А.С.Чиркин

Предложен аналитический рекуррентный метод решения обратной задачи статистики фотоотсчетов, т. е. восстановления распределения фотонов по распределению фотоотсчетов, для малофотонного света. Показано, что если поставить в соответствие обратной задаче систему линейных уравнений, то для финитных распределений можно получить рекуррентную формулу, связывающую распределение фотоотсчетов и распределение фотонов без ограничений на квантовую эффективность фотодетектирования.

Ключевые слова: *квантовая оптика, статистика фотоотсчетов, обратная задача, рекуррентный метод.*

1. Введение

Метод счета фотонов – один из основных методов измерения характеристик световых полей в квантовой оптике. Этот способ регистрации оптического излучения имеет более чем вековую историю [1], но особенно интенсивно он стал развиваться вскоре после создания лазерных источников излучения. К настоящему времени метод счета фотонов находит широкое применение как в прикладных [2–6], так и в фундаментальных исследованиях [7–10]. В основе метода лежит фотоэффект, в результате которого происходит испускание электрона с поверхности катода после поглощения одного или нескольких фотонов. С помощью метода счета фотонов осуществляется подсчет числа фотоэлектронов, «выбитых» падающим на фотокатод светом за некоторый фиксированный промежуток времени T. При регистрации непрерывного или периодического импульсного излучения возможно многократное повторение измерений. В этом случае ценность метода счета фотонов возрастает, т.к. появляется возможность измерения более информационно емкой характеристики фотоэффекта – статистики фотоотсчетов, т.е. распределения вероятностей Q_m того, что за время измерения T будет зарегистрировано m фотоэлектронов.

В последнее время в связи с развитием квантовых оптических технологий возросла значимость информации о статистических свойствах малофотонного излучения, что стимулировало дополнительный интерес к более глубокому исследованию как прямой, так и обратной задачи статистики фотоотсчетов. С практической точки зрения более важной представляется обратная задача – восстановление распределения фотонов по измеренной статистике фотоотсчетов. Важность этой задачи, в частности, обусловлена тем, что в настоящее время в оптических технологиях и в квантовой оптике [11–13] широко используются малофотонные источники света, величина дробового шума которых сравнима со средней интенсивностью светового сигнала или даже больше ее. При этом энергетические характеристики таких источников наиболее просто могут быть получены с помощью фотоэлектрических измерений.

П.П.Гостев, С.А.Магницкий, А.С.Чиркин. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы;
e-mail: gostev.pavel@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 10 августа 2021 г.

Как следует из квантовой теории фотоэффекта, знания статистики фотоотсчетов недостаточно для полного восстановления квантового состояния поля, в общем случае определяемого матрицей плотности, но достаточно для определения ее диагональных элементов [14, 15]. Знание диагональных элементов матрицы плотности для малофотонного света по информационной ценности аналогично знанию мощности для непрерывного излучения или профиля интенсивности для импульсного излучения ярких источников света. С помощью статистики фотоотсчетов можно, в принципе, получить полное энергетическое описание малофотонных источников света, но для этого должна быть решена обратная задача статистики фотоотсчетов.

Уже на начальном этапе разработки метода счета фотонов для классического света, помимо прямой задачи – нахождения статистики фотоотсчетов по распределению интенсивности, интерес вызывала обратная задача – восстановление распределения интенсивности света по статистике фотоотсчетов. Впервые эту задачу, по-видимому, решили в работе [16]. Авторы исходили из полуклассической формулы Манделя [17], согласно которой распределение фотоотсчетов представляет собой усредненное по распределению Пуассона распределение интенсивности излучения. Позднее были разработаны различные подходы к решению данной проблемы (см., напр., [18–21]). Эти подходы также основывались на формуле Манделя.

При квантовом описании, которое справедливо не только для классического, но и для неклассического света, интенсивности соответствует оператор числа фотонов, а распределение интенсивности переходит в дискретное распределение фотонов P_n – распределение вероятностей того, что за время измерения T в световом потоке окажется n фотонов. В этом случае прямая задача статистики фотоотсчетов заключается в нахождении распределения фотоотсчетов Q_m по заданному распределению фотонов P_n. Эти распределения, согласно [15, 22–24], связаны через преобразование Бернулли:

$$Q_m = \sum_{n \geqslant m} C_n^m \eta^m (1-\eta)^{n-m} P_n, \tag{1}$$

где η – квантовая эффективность фотодетектирования; $C_n^m = n!/[m!(n-m)!]$ – биномиальный коэффициент.

Таким образом, в случае малофотонного света под обратной задачей статистики фотоотсчетов следует понимать нахождение распределения фотонов P_n, которое входит в формулу (1), по заданному распределению фотоотсчетов Q_m. Для решения этой задачи известны два аналитических метода. Первый из них основан на прямой инверсии преобразования Бернулли [23], второй – на аппарате производящих функций [25].

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на возможность поставить в соответствие обратной задаче статистики фотоотсчетов систему линейных уравнений и возможность решения ее рекуррентным методом, что может оказаться полезным для восстановления финитных распределений фотонов.

2. Рекуррентная формула, связывающая распределение фотонов с распределением фотоотсчетов

Решение прямой задачи статистики фотоотсчетов (1) может быть представлено в матричном виде [15]:

$$Q_m = D_{mn}(\eta) P_n, \tag{2}$$

где треугольная матрица $D_{mn}(\eta)$ имеет вид

$$D_{mn}(\eta) = \begin{cases} C_n^m \eta^m (1-\eta)^{n-m}, & n \geqslant m, \\ 0, & n < m. \end{cases} \tag{3}$$

Распределения фотонов бывают финитными, например распределение фотонов, излучаемых ансамблем квантовых точек [26] или флуоресцирующих молекул [27], и инфинитными, такими как распределения Пуассона и Бозе–Эйнштейна, а также распределения фотонов в квадратурно-сжатых состояниях [28].

Для финитных распределений существует такое максимальное число фотонов N, при котором для $n > N$ величина $P_n \equiv 0$. В этом случае формула (2) может быть интерпретирована как система N линейных уравнений. Поскольку матрица $D_{mn}(\eta)$ является треугольной, можно воспользоваться обратным ходом известного метода Гаусса и восстановить распределение фотонов рекуррентным способом, начиная с последнего члена.

Исходя из формулы (2), выпишем выражения для нескольких последних элементов распределения фотоотсчетов в явном виде:

$$Q_N = \eta^N P_N,$$

$$Q_{N-1} = \eta^{N-1} P_{N-1} + N\eta^{N-1}(1-\eta) P_N,$$

$$Q_{N-2} = \eta^{N-2} P_{N-2} + (N-1)\eta^{N-2}(1-\eta) P_{N-1} + \frac{N(N-1)}{2}\eta^{N-2}(1-\eta)^2 P_N,$$

и последовательно выразим элементы распределения фотонов с меньшим числом фотонов через элементы распределения фотонов с бóльшим числом фотонов:

$$P_N = \eta^{-N} Q_N,$$

$$P_{N-1} = \eta^{-(N-1)} Q_{N-1} - N(1-\eta) P_N,$$

$$P_{N-2} = \eta^{-(N-2)} Q_{N-2} - (N-1)(1-\eta) P_{N-1} - \frac{N(N-1)}{2}(1-\eta)^2 P_N.$$

Продолжая рекуррентный ряд, по индукции получаем рекуррентную формулу восстановления распределения P_n по заданному распределению Q_m:

$$P_n = \eta^{-n} Q_n - \sum_{k>n}^{N} C_k^n (1-\eta)^{k-n} P_k. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что распределение фотонов можно найти, переходя последовательно от вероятностей большего числа фотоотсчетов к вероятностям меньшего их числа.

3. Восстановление биномиального распределения фотонов с помощью рекуррентной формулы

В качестве примера рассмотрим финитное биномиальное распределение фотонов, испускаемых ансамблем N независимых излучателей [29]. Если предположить, что каждый излучатель испускает фотон с вероятностью r, то распределение фотонов будет иметь вид

$$P_n = C_N^n r^n (1-r)^{N-n}. \tag{5}$$

Подставив это распределение в формулу (1), нетрудно показать, что распределение фотоотсчетов также будет биномиальным:

$$Q_m = C_N^m (\eta r)^m (1-\eta r)^{N-m}. \tag{6}$$

На этом примере мы демонстрируем, что полученная рекуррентная формула позволяет корректно решить обратную задачу статистики фотоотсчетов для финитного распределения. В соответствии с формулой (5) задавалось биномиальное распределение фотонов P_n^{in} с параметрами $r = 0.5$ и $N = 10$. По формуле (2) вычислялось распределение фотоотсчетов при $\eta = 0.3$, из которого по формуле (4) восстанавливалось распределение фотонов P_n^{rec} и сравнивалось с P_n^{in}.

На рис.1 представлены исходное (P_n^{in}) и восстановленное по рекуррентной формуле (4) (P_n^{rec}) распределения фотонов. Видно, что данные распределения совпадают, и это подтверждает корректность полученной в работе формулы (4).

4. Заключение

В работе показано, что для финитных распределений фотонов, если поставить в соответствие обратной задаче статистики фотоотсчетов систему линейных алгебраичес-

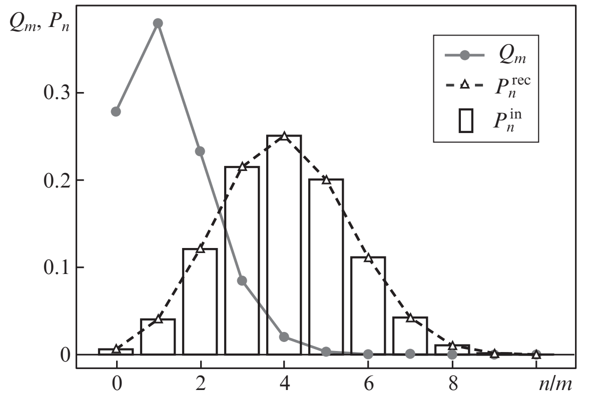

Рис.1. Пример восстановления финитного биномиального распределения фотонов по рекуррентной формуле (4): $P_n^{\rm in}$ – исходное распределение фотонов; $P_n^{\rm rec}$ – восстановленное распределение фотонов; Q_m – распределение фотоотсчетов, инициируемое световым потоком с распределением фотонов $P_n^{\rm in}$; расчеты выполнены при $N = 10$, $\eta = 0.3$ и $r = 0.5$.

ких уравнений, можно получить рекуррентную формулу, связывающую распределение фотоотсчетов и распределение фотонов. Формула численно проверена на финитном биномиальном распределении фотонов. Восстановленное по рекуррентной формуле распределение фотонов совпало с исходным до 16-го десятичного разряда.

Приведенные результаты показывают, что для решения обратной задачи статистики фотоотсчетов, наряду с инверсией преобразования Бернулли и методом производящих функций, можно также использовать предлагаемый в работе рекуррентный метод. Заметим, что применять рекуррентный метод для оценки инфинитных распределений фотонов по статистике конечной выборки фотоотсчетов следует с осторожностью. Это замечание относится не только к предлагаемому в работе рекуррентному методу, но и ко всем другим аналитическим методам решения обратной задачи статистики фотоотсчетов. Проблема корректной оценки инфинитных распределений фотонов связана с вопросами устойчивости решения обратной задачи при конечном объеме выборки и, в принципе, требует отдельного анализа для каждого конкретного распределения Q_m.

Авторы благодарят Д.П.Агапова и Д.Н.Фроловцева за полезные дискуссии.

Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 21-12-00155).

1. Morel S., Saha S., in *21st Century Astrophysics* (Delhi: Anita Publications, 2005).
2. Wick R. *Biotechniques*, **7**, 262 (1989).
3. Hadfield R. *Nat. Photonics*, **3**, 696 (2009).
4. Taguchi K., Iwanczyk J. *Med. Phys*., **40**, 100901 (2013).
5. Chunnilall C., Degiovanni I., Kück S., Müller I., Sinclair A. *Opt. Eng*., **53**, 081910 (2014).
6. Flohr T., Petersilka M., Henning A., Ulzheimer S., Ferda J., Schmidt B. *Physica Medica*, **79**, 126 (2020).
7. Banaszek K., Wódkiewicz K. *Phys. Rev. Lett*., **76**, 4344 (1996).
8. Banaszek K., Radzewicz C., Wódkiewicz K., Krasiń ski J. *Phys. Rev. A*, **60**, 674 (1999).
9. Nehra R., Win A., Eaton M., Sridhar N., Shahrokhshahi R., Gerrits T., Lita A., Nam S., Pfister O. *Optica*, **6**, 1356 (2019).
10. Ortolano G., Losero E., Ola S., Genovese M., Ruo-Berchera I. *Sci. Adv*., **7**, eabc7796 (2021).
11. Messin G., Sanders B., Petrosyan D., Rarity J. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*., **42**, 110201 (2009).
12. Eisaman M., Fan J., Migdall A., Polyakov S. *Rev. Sci. Instrum*., **82**, 071101 (2011).
13. Pathak A., Ghatak A. *J. Electromagn. Waves Appl*., **32**, 229 (2018).
14. Frolovtsev D.N., Magnitskiy S.A., Demin A.V. *Meas. Tech*., **63**, 273 (2020).
15. Kiss T., Herzog U., Leonhardt U. *Phys. Rev. A*, **52**, 2433 (1995).
16. Wolf E., Mehta C. *Phys. Rev. Lett*., **13**, 705 (1964).
17. Mandel L. *Proc. Phys. Soc*., **72**, 1037 (1958).
18. Gabriel B. *J. Opt. Soc. Am*., **57**, 1201 (1967).
19. Sultani F., Aime C., Lantéri H. *Pure Appl. Opt*., **4**, 89 (1995).
20. Earnshaw J., Haughey D. *Rev. Sci. Instrum*., **67**, 4387 (1996).
21. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981).
22. Scully M., Lamb W. *Phys. Rev*., **179**, 368 (1969).
23. Lee C. *Phys. Rev. A*, **48**, 2285 (1993).
24. Лоудон Р. *Квантовая теория света* (М.: Мир, 1976).
25. Herzog U. *Phys. Rev. A*, **53**, 1245 (1996).
26. Arakawa Y., Holmes M. *Appl. Phys. Rev*., **7**, 021309 (2020).
27. Ta H., Wolfrum J., Herten D. *Laser Phys*., **20**, 119 (2010).
28. Walls D., Milburn G. *Quantum Optics* (New York: Springer Science & Business Media, 2007).
29. Hloušek J., Dudka M., Straka I., Ježek M. *Phys. Rev. Lett*., **123**, 153604 (2019).