

ОБЗОР

Диссипативные аспекты экстремальной нелинейной оптики

Н.Н.Розанов, И.А.Александров, М.В.Архипов, Р.М.Архипов,
И.Бабушкин, Н.А.Веретеннов, А.В.Дадеко, Д.А.Тумаков, С.В.Федоров

Представлен обзор исследований эффектов экстремальной нелинейной оптики, в которых принципиальную роль играют диссипативные факторы, такие как поглощение и усиление света в среде. Генерация экстремальных по длительности импульсов вплоть до униполярных анализируется на примере развития представлений о явлении самоиндуцированной прозрачности, практическое применение которого становится реальным для предельно коротких импульсов в лазерах и лазерных средах. Экстремальность структурирования излучения достигается для диссипативных (лазерных) солитонов, характеризующихся сложной топологией фазовых и поляризационных сингулярностей, что представляет интерес для кодирования информации.

Ключевые слова: предельно короткие импульсы излучения, униполярные импульсы, самоиндуцированная прозрачность, топологические диссипативные оптические солитоны.

1. Введение

Хотя сам термин «нелинейная оптика» возник более 70 лет назад [1], а первые эксперименты с существенно нелинейным эффектом насыщения поглощения были выполнены еще раньше [2], современный облик эта наука приобрела лишь после появления лазеров [3]. Предметом ее исследований служит эволюция излучения в среде или системе, оптические свойства которой зависят от самого излучения, при этом излучение и среда выступают в общем случае в качестве равноправных партнеров. Тем самым нелинейная оптика включает в себя и электродинамику, и физику сред в различных агрегатных состояниях, что указывает на практически безграничную возможность развития этой науки.

За прошедшие 60 лет объем исследований по нелинейной оптике чрезвычайно возрос, что видно уже из сравнения первых [4, 5] и одной из последних [6] монографий по этой теме. Вместе с тем, основным объектом нелинейной оптики были прозрачные среды, а поглощение рассматривалось как слабый и нежелательный эффект, препятст-

вующий уже самому распространению излучения. Конечно, насыщение поглощения интенсивным излучением было известно еще в долазерный период оптики [2], не говоря уже о его принципиальной роли в характеристиках лазерной генерации. Однако вызванными диссипативными факторами эффекты типа волн просветления [7] стояли в стороне от основного направления исследований.

В настоящем обзоре мы хотели бы подчеркнуть важную стабилизирующую роль диссипативных факторов в нелинейной оптике, позволяющих реализовать режимы, недоступные для «консервативной» нелинейной оптики прозрачных сред. Речь будет идти о стабилизации за счет динамического баланса таких факторов, как поглощение и усиление. Здесь мы ограничимся только несколькими, но важными, с нашей точки зрения, направлениями, выявляющими тенденции современной нелинейной оптики. Так, если вскоре после начала лазерной эры нелинейной оптики речь шла, главным образом, об излучении, состоящем из небольшого набора квазимонохроматических квазиплоских волн, то в обзоре мы говорим о продвижении к предельным как по длительности (предельно короткие импульсы, вплоть до униполярных), так и по сложности топологии поля (топологические солитоны) режимам. В обоих случаях принципиальную роль играет диссипативность среды или системы, т. е. релаксация в ней, а также приток и отток энергии. Действительно, даже для предельно коротких импульсов, длительность которых много меньше времен релаксации среды, пренебрежение ею ведет к физически некорректным последствиям. Так, возбуждение осцилляторов среды прохождением через нее такого импульса вызвало бы неограниченно долгое излучение этими осцилляторами, т. е. бесконечно большую энергию, излученную ими (в случае солитонов к тому же приводили бы их малые возмущения).

С учетом уже опубликованных обзоров и монографий, лишь кратко упоминая приведенные в них результаты, мы остановимся в следующих двух разделах на таких вопросах. Во-первых, для предельно коротких импульсов мы представим историю и последующее развитие иссле-

Н.Н.Розанов, Н.А.Веретеннов, С.В.Федоров. Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе, Россия, 194021 С.-Петербург, Политехническая ул., 26; e-mail: nnrosanov@mail.ru, sfedorov2006@bk.ru, torrek@gmail.com

И.А.Александров, М.В.Архипов, Р.М.Архипов, Д.А.Тумаков. Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 190034 С.-Петербург, Университетская наб., 7–9; e-mail: i.aleksandrov@spbu.ru, m.arkhipov@klnran.ru, arkhipovrostislav@gmail.com, dm.tumakov@gmail.com

И.Бабушкин. Institute for Quantum Optics, Leibniz Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover, Germany; Cluster of Excellence PhoenixD (Photonics, Optics, and Engineering – Innovation across Disciplines), Welfengarten 1, 30167 Hannover, Germany; Max Born Institute, Max Born Str. 2A, 12489, Berlin, Germany; e-mail: babushkin@iqo.uni-hannover.de

А.В.Дадеко. АО «ГОИ им. С.И. Вавилова», Россия, 199053 С.-Петербург, Кадетская л., 5, корп. 2; e-mail: tosuk007@inbox.ru

дований эффекта самоиндуцированной прозрачности, вплоть до его проявления для предельно коротких и униполярных импульсов. Во-вторых, мы также кратко напомним историю исследований топологических оптических солитонов и более полно изложим свежие результаты по топологии векторных диссипативных солитонов (с учетом поляризации излучения).

2. Самоиндуцированной прозрачность, перспективы практического применения

Открытые за короткий период времени после появления первых лазеров основные нелинейно-оптические явления, включая генерацию гармоник, параметрическую генерацию, самофокусировку и др., нашли практические применения и широко используются в настоящее время [6]. Иначе сложилась судьба крайне необычного для тех лет, отчасти потому что оно не имело прямых аналогов в нелинейных радиоэлектронных системах, явления самоиндуцированной прозрачности (СИП), продемонстрированного на заре лазерной эры Мак-Коллом и Ханом [8, 9]. Оно заключается в том, что обладающий определенной интенсивностью короткий импульс, длительность которого меньше времени релаксации поляризации среды T_2 , может распространяться в среде практически без поглощения (2π -импульс). Важно отметить, что это явление относится к так называемым когерентным явлениям взаимодействия излучения с веществом.

На переднем фронте импульс инвертирует среду, а на его заднем фронте в результате стимулированного излучения поглощенная средой энергия возвращается в импульс. Поэтому скорость движения такого импульса в среде может быть существенно меньше скорости света. Одним из важнейших элементов развитой в те годы теории СИП является знаменитая теорема площадей, которая описывает эволюцию площади огибающей импульса при когерентном распространении короткого лазерного импульса в резонансно поглощающей или усиливающей среде [9].

На сегодняшний день данное явление хорошо изучено теоретически и экспериментально продемонстрировано в различных средах. Ему посвящены обзоры и монографии [10–13], представлена эта тематика и в журнале «Квантовая электроника» [14, 15].

Среди отечественных работ по изучению явления СИП следует особо упомянуть статьи А.И.Маймистова и С.В.Сазонова с сотр., продолжающих исследовать этот эффект более углубленно и в новых условиях [16–20].

В отличие от многих других явлений нелинейной оптики, эффект СИП до сих пор не нашел практических применений, оставаясь предметом академических исследований. Хотя в работе [21] и была показана возможность сжатия длинных лазерных импульсов с помощью СИП, короткие импульсы проще было получить другими методами. Возможность использования СИП для генерации коротких импульсов в лазерах, о чем мы будем говорить ниже, неочевидна, а первые попытки ее реализации не привели к успеху. Отсутствие видимых применений подчеркивается, например, в монографии Шена по нелинейной оптике [22].

В первых экспериментальных работах по получению коротких импульсов в газовых He–Ne-лазерах делались попытки использовать дополнительную ячейку с чистым Ne [23]. Поглощение на лазерном переходе в атомах Ne

могло бы происходить по механизму СИП и служить источником возникновения коротких импульсов в результате этого явления. Однако детальные исследования выявили, что возникновение режима синхронизации мод связано с режимом некогерентного насыщения, а не с когерентным явлением СИП.

Реализация режима пассивной синхронизации мод в лазерах осуществляется при размещении в его резонаторе поглощающей среды – так называемого насыщающегося поглотителя. Он является нелинейным пассивным модулятором потерь за счет некогерентного эффекта насыщения поглощения, что, сразу отметим, ограничивает минимальную длительность импульса временами релаксации в поглотителе. Также в насыщающихся поглотителях (красители, полупроводники) линии поглощения достаточно широки и обладают быстрой релаксацией. С этой точки зрения рассмотрение атомарных сред с узкими линиями поглощения кажется невозможным, поскольку они не обеспечили бы малой длительности импульса и перестройки спектра импульса в диапазоне частот полосы усиления активной лазерной среды. В литературе, в том числе и в «Квантовой электронике», имеется большое число обзоров и глав в монографиях, посвященных этим вопросам [24–28].

Следует отметить, что в те годы был опубликован ряд работ, в которых в резонаторах лазеров различных типов располагались поглощающие атомарные среды. В подобных экспериментах наблюдались эффекты захвата частоты генерации лазеров, а также возникновение многокомпонентного спектра вблизи линий поглощения различных атомов (см., напр., [29–33]). В работах разных авторов эти эффекты интерпретировались по-разному. Наиболее простая интерпретация была связана с наведением решеток показателя преломления вблизи узких линий поглощения [34, 35]. Высказывались предположения о том, что причиной изменения спектральных характеристик генерации были когерентные эффекты при взаимодействии лазерного излучения с веществом [36, 37]. При этом в тех экспериментах, в которых обсуждался возможный когерентный механизм влияния атомарных переходов на спектр генерации, не было обнаружено эффекта самоиндуцированной прозрачности в среде и обусловленных им режимов синхронизации мод.

В то же время существовало понимание возможности применения СИП для формирования режима синхронизации мод. Здесь надо упомянуть публикацию в журнале «Квантовая электроника» [38]. В ней теоретически анализировался твердотельный лазер, в резонаторе которого располагалась ячейка с парами щелочного металла. Авторы пришли к выводу о возможности получения режима синхронизации мод путем формирования импульсов СИП на резонансных переходах атомных паров.

Указанная работа, как и ряд других немногочисленных теоретических работ в этом направлении, не вызвала большого интереса, и желающих провести соответствующие эксперименты не нашлось, т. к. практический результат – получение импульсов вблизи фиксированных частот переходов – не имел большой практической ценности. В те годы можно было получать перестраиваемое по частоте излучение, используя другие способы. Последним посвящено много обзоров в отечественной и зарубежной литературе (см., напр., [27]). Отметим, что в них не упоминалось о возможном использовании СИП для формирования режима синхронизации мод.

Это не препятствовало появлению отдельных работ в данном направлении. В 1997 г. появилась теоретическая работа [39]; фактически она была инспирирована интересом к солитонной тематике в волоконной нелинейной оптике. Автором был актуализован термин «когерентная синхронизация мод» (КСМ). Отчетливо сформулировано то обстоятельство, что как усилитель, так и поглотитель лазера могут работать в когерентном режиме. Это снимает фундаментальное ограничение на длительность импульса, накладываемое ширинами линий поглощения и усиления в обычных лазерах с насыщающимся поглотителем. При этом в усилителе распространяется π -импульс, а в поглотителе – 2π -импульс, для чего требуется двукратное различие дипольных моментов на переходе усилителя и поглотителя. (Справедливости ради отметим, что такая идея последовательного размещения усилителя и поглотителя в режиме когерентного усиления высказывалась еще в обзоре Крюкова и Летохова в 1969 г. [12].) Возможность синхронизации мод в твердотельных лазерах в результате формирования 2π -импульсов СИП в когерентном поглотителе рассматривалась теоретически также в работах [40, 41].

В работе [39] был сделан теоретический анализ смеси поглощающей и усиливающей сред в соответствии с попытками их экспериментальной реализации в волоконных лазерах. В последующих работах анализировалась возможность КСМ в квантово-каскадных лазерах [42, 43].

В то же время шло формирование нового направления в физике солитонов, посвященного «диссипативным солитонам». Концепция диссипативных солитонов подразумевала такие объекты, локализация и форма которых в пространстве и времени определяется средой с потерями энергии, компенсируемыми усилением [44]. Для простоты теоретического описания усиление и поглощение считаются перемешанными и однородно распределенными в пространстве. Отчасти такой модели будет соответствовать лазер с усилителем и поглотителем, если пренебречь дискретностью потерь и разнесением сред в пространстве. С таких позиций импульсы генерации в режиме синхронизации мод можно рассматривать как диссипативные солитоны, если их протяженность и расстояния между ними значительно меньше длины резонатора лазера [44].

Появление, хотя и нечастое, теоретических работ в области КСМ не вызвало энтузиазма у экспериментаторов. Этому, по нашему мнению, способствовали следующие обстоятельства. Существует укоренившееся мнение о том, что сокращение длительности импульса требует крайне широкой полосы усиления усилителя. Одновременно с этим для очень коротких импульсов нужен насыщающийся поглотитель с крайне быстрым временем релаксации. Отсутствовало понимание того, что при когерентном взаимодействии, когда, например, формируется импульс СИП, его спектр шире линии перехода. Когерентное взаимодействие имеет место, если длительность импульса меньше времени релаксации поляризации перехода. Тогда поглощение и усиление наблюдаются вне спектральной линии резонансного перехода. Кроме того, эксперименты по СИП сравнительно сложны, а теоретические работы, в которых используются упрощения, кажутся не вполне убедительными для экспериментаторов. Также в упомянутых работах считалось, что самостарт генерации невозможен и требуется инжек-

ция затравочного излучения, что дополнительно усложняет эксперимент.

Указанное упрощение, пришедшее из теории диссипативных солитонов, основано на смешивании поглощающей и усиливающих сред. В противоположность этому в наших работах [45, 46] был рассмотрен лазер с разнесенными в пространстве усилителем, поглотителем и дискретными потерями на зеркалах. В случае как линейного резонатора, где присутствуют встречные волны, так и кольцевого резонатора, с помощью численных расчетов было показано, что режим КСМ возможен. В последующей работе [47] режим КСМ был проанализирован наглядно с использованием диаграмм «теоремы площадей» Мак-Колла и Хана. В упомянутых расчетах инжекции внешнего излучения не требовалось, что крайне важно практически.

Наши теоретические исследования убедили нас в возможности экспериментальной демонстрации режима КСМ. Однако первая попытка была не вполне удачной [48, 49]. В непрерывном лазере на красителе мы размещали ячейку с парами молекулярного иода. Настраивая длину волны генерации лазера в область линии поглощения (таких линий достаточно много), мы надеялись получить синхронизацию мод с 2π -импульсами СИП. Действительно, при генерации лазера возникал режим синхронизации, однако импульсы не были 2π -импульсами СИП. По нашему мнению, мы получили 0π -импульсы [49], не представляющие, по-видимому, практического интереса. Тем не менее режим генерации возникал за счет когерентного взаимодействия с поглотителем. По этим результатам сложно оценить, почему генерировались именно такие импульсы и может ли вообще возникать генерация 2π -импульсов.

Впервые экспериментально возникновение СИП в виде 2π -импульсов в среде, расположенной в резонаторе лазера, было продемонстрировано в работе Дилса с соавторами [50]. Однако в этой работе СИП не была причиной появления режима синхронизации мод. Действительно, синхронизацию мод лазера в работе [50] обеспечивал нелинейный насыщающийся поглотитель SESAM, а затем частота генерации перестраивалась на линии поглощения изотопов рубидия.

Демонстрация 2π -импульсов в работе [50] только при наличии дополнительного поглотителя, «раскачивающего» режим синхронизации, также не говорила в пользу простоты экспериментальной реализации теоретических идей применения СИП для реализации режима синхронизации мод. Тем не менее мы решились на проведение экспериментов с титан-сапфировым лазером, в резонатор которого сначала поместили ячейку с парами рубидия [51–53], а затем с парами цезия, и нам удалось доказать, что режим КСМ за счет СИП с 2π -импульсами можно получить экспериментально как в линейном, так и в кольцевом резонаторе (подробности описаны в упомянутых публикациях). Результаты данных исследований резюмированы в обзорах [54, 55]. Режим является самостартующим, и, что важно, длительность импульса с ростом мощности генерации падает. Это отличает режим от соответствующего режима в лазере с насыщающимся поглотителем. При этом структура подуровней, неоднородное уширение и другие факторы не препятствовали возникновению СИП, поскольку длительности импульсов были короче соответствующих времен релаксации.

Полученные в экспериментальных работах длительности импульсов пока не могут конкурировать со значениями, достигаемыми в таком же титан-сапфировом лазере с керровской линзой. Однако в них были продемонстрированы важные особенности КСМ: самостарт режима генерации и сокращение длительности импульсов, пропорциональное мощности генерации. Последнее обстоятельство, как мы надеемся, позволит получить предельно короткие одноцикловые импульсы в режиме КСМ при дальнейшем увеличении накачки. Именно на него указано в работах [56, 57], ставших естественным продолжением, с одной стороны, работ по КСМ в режиме многоцикловых импульсов, а с другой – серии работ по предельно коротким диссипативным солитонам СИП в безрезонаторной схеме, представляющей собой среду с активными (с лазерным усилением) и пассивными центрами, внедренными в матрицу [58–61]. Действительно, для лазеров с резонатором большой длины, как в работах [56, 57], спектр продольных мод становится практически сплошным и импульсы КСМ совпадают с диссипативными солитонами безрезонаторной схемы. Эти работы входят в интенсивно развивающийся в последнее время раздел нелинейной оптики, посвященный предельно коротким, вплоть до униполярных, импульсам излучения, которые обладают многими необычными и привлекательными для приложений свойствами (см. обзоры [62, 63] и монографию [64]).

Как подчеркивается в этих публикациях, вместо площади огибающей импульса в теории Мак-Колла и Хана самоиндуцированной прозрачности многоцикловых импульсов [8, 9], для предельно коротких импульсов определяющую роль играет электрическая площадь импульса $S_E = \int E dt$ (E – напряженность электрического поля, t – время). Ее значение максимально для униполярных импульсов, для которых воздействие поля на свободные или связанные заряды однонаправленно и потому наиболее эффективно. Ранее в [65] были найдены теоретически стационарные униполярные импульсы СИП в безрезонаторной схеме – среде пассивных двухуровневых атомов (в пренебрежении слабым поглощением), однако оставалось неясным, как можно их получить из исходных «стандартных» биполярных импульсов. Введение диссипативного фактора (активных атомов), как в приведенных выше работах, позволило создать подход к решению этой проблемы.

В работе [66] была продемонстрирована еще одна особенность режима когерентной синхронизации мод, заключающаяся в том, что сокращение длительности импульса неизбежно потребует уменьшения длины резонатора. Этот вывод был сделан на основе выведенного правила подобия для лазеров, действующих в режиме синхронизации мод. Оно интересно тем, что позволяет экстраполировать результаты численных расчетов для одного набора параметров на ситуации с существенно измененными по определенным правилам параметрами лазера.

Требование уменьшения длины резонатора для сокращения длительности импульсов подтвердилось и в наших экспериментах. С ростом мощности генерации длительность сокращалась до определенного значения, но затем возникали гармонические режимы синхронизации мод.

По нашему мнению, совокупность уже имеющихся теоретических представлений и экспериментальные результаты позволяют серьезно говорить о реальности практи-

ческой реализации предельно коротких импульсов в режиме КСМ. Лазер с такими свойствами должен будет иметь крайне короткий (около десятка длин волн) резонатор, и его создание станет непростой технологической задачей. Для этого необходим подбор сред и решение проблемы тепловой и лучевой стойкости материалов. Однако затраченные усилия и средства позволят получить миниатюрный источник предельно коротких импульсов с частотой следования в терагерцевом диапазоне частот. Возможно, это позволит на порядки увеличить скорости передачи и обработки информации. Возможно также, что они будут использоваться в качестве задающих генераторов для получения еще более коротких униполярных импульсов, интерес к которым в последнее время растет [63].

В экспериментах с титан-сапфировым лазером удалось также наблюдать крайне редкие события резкого роста амплитуды и сокращения длительности импульсов, возникавших в режиме КСМ. В последнее время возрос интерес к неожиданным природным явлениям. Начало этому положили исследования в области океанографии океанских волн аномально большой амплитуды, представляющих угрозу для судоходства и побережий [67]. В процессе исследования механизмов их зарождения пришлось понимать то, что существуют интересные аналогии между редкими событиями разной физической природы, в частности между океанографией и оптикой [68, 69].

Если провести аналогию с бассейном с водой, то вне области экстремального события множество волн создают картину, похожую на хаотическую рябь на поверхности воды. Затем рябь начинает пропадать, и небольшие волны очень быстро сливаются в одну волну большой амплитуды. Эта волна быстро возникает и так же быстро исчезает. И вновь на поверхности остается рябь из движущихся во встречных направлениях волн без какого-либо видимого порядка. Такие события носят статистический характер, но появляются с вероятностью на много порядков большей, чем в случае множества независимых линейных волн.

Нам удалось расширить круг подобных явлений: мы обнаружили [70], что такие экстремальные события могут наблюдаться в титан-сапфировом лазере, в резонаторе которого присутствуют 2π -импульсы. Последние можно интерпретировать как диссипативные солитоны СИП [64]. При наличии нескольких импульсов, которые демонстрировали взаимодействие друг с другом, было зафиксировано образование солитонных молекул, слияние нескольких солитонов в один и распады солитонов. Событие слияния всех солитонов в один было крайне редким, оно сопровождалось резким возрастанием пиковой мощности импульса генерации и сокращением его длительности. В рамках сложившейся терминологии подобное событие классифицируется как экстремальное. Экстремальные события являются следствием внутренней динамики лазера, а не флуктуациями технического характера. До сих пор экстремальные явления в системах диссипативных солитонов СИП не предсказывались и не наблюдались экспериментально.

На рис.1 представлен пример осциллограммы экстремального события в лазере с ячейкой, содержащей пары цезия, при генерации на длине волны перехода D2 (852 нм). В центре осциллограммы зафиксировано экстремальное событие. Интервал между такими событиями

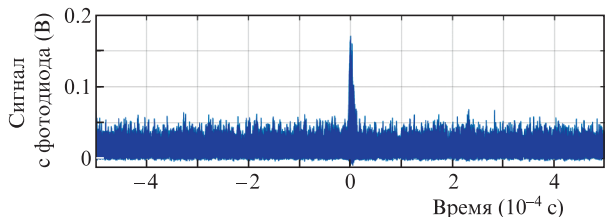


Рис.1. Пример осциллограммы, содержащей экстремальное событие.

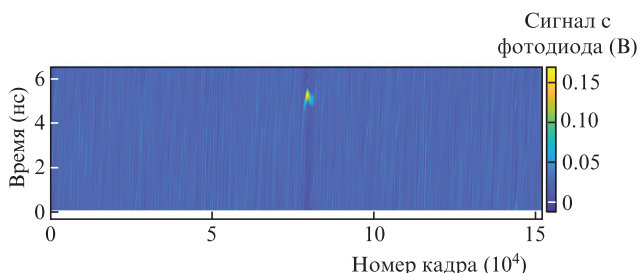


Рис.2. Покадровая обработка осциллограммы.

в условиях проведенного эксперимента был в среднем около 5 с.

На рис.2 показан результат «нарезки» осциллограммы рис.1 на фрагменты длительностью, соответствующей времени двойного обхода резонатора (вертикальная ось). Эти кадры сложены вдоль горизонтальной оси. Такая покадровая обработка осциллограммы показывает наличие солитонного газа, т.е. набора множества солитонов вне экстремального события.

Поведение солитонного газа в окрестности экстремального события показано на рис.3. Видны этапы слияния солитонов в один, возникновение одного интенсивного солитона и его последующий распад.

В заключение раздела вернемся к возможным «внерезонаторным» применениям СИП для получения предельно коротких импульсов и компрессии световых импульсов. Если в работе [21] была показана возможность сжатия многоцикловых лазерных импульсов за счет явления СИП, то в недавней работе [71] была предложена схема многокаскадного компрессора одноцикловых импульсов. Как следует из расчетов, составляющие одноцикловый импульс униполярные полуволны противоположной полярности могут вести себя как отдельные импульсы и в

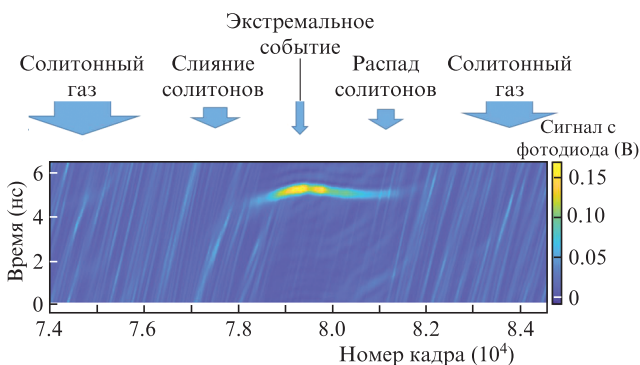


Рис.3. Увеличенный фрагмент рис.2 вблизи экстремального события. Вверху слева направо стрелками показаны участки, где есть солитонный газ, идет процесс слияния солитонов; за экстремальным событием, которое отвечает центру рисунка, следует распад солитона экстремальной амплитуды и появление солитонного газа.

результате распространения с разными скоростями в режиме СИП они могут приближаться друг к другу. Это приводит к компрессии и существенному сдвигу частоты исходного одноциклового импульса.

Однако при определенных условиях возможен и противоположный сценарий, когда полуволны СИП, наоборот, отталкиваются друг от друга [72]. В этом случае на выходе из среды появляются два униполярных импульса противоположной полярности, разнесенных во времени. Данный механизм позволяет получить униполярные полуволновые аттосекундные импульсы с большой электрической площадью, что важно для практических приложений, таких как эффективное управление динамикой волновых пакетов в различных веществах, ускорения зарядов и др. [73–79]. Представляется, что явление СИП наиболее ярко проявит свой потенциал практических приложений именно в области предельно коротких импульсов и для существенно диссипативных (лазерных) систем.

3. Топологические диссипативные оптические солитоны

Уточним, что под термином «оптический солитон» мы будем понимать устойчивую локализованную структуру излучения в нелинейной среде или системе, причем локализация вызвана именно нелинейными факторами, а размеры структуры слабо связаны с масштабами неоднородности среды. В идеальной ситуации среда или система однородна в направлениях нелинейной локализации и положение солитона по этим направлениям произвольно (определяется начальными условиями).

В этом разделе мы будем рассматривать, как и в традиционной постановке нелинейно-оптических задач, режимы излучения, близкого к квазимонохроматической и квазиплоской волне, но со сложной внутренней структурой. А именно, излучение будет здесь обладать сингулярностями одного или двух типов [80–85]. Первый тип проявляется уже для скалярных волн, что в оптике отвечает существенной величине только одной из поляризационных составляющих поля. Сингулярность заключается в неопределенности фазы волны; для поляризованного излучения можно говорить о сингулярностях (дислокациях) волнового фронта поляризационных составляющих по отдельности. В фиксированном поперечном сечении, единственно допустимом для двумерных солитонов, дислокации могут быть изолированными (отдельные точки сечения) или неизолрованными (линии или области). Изолированные (винтовые) дислокации волнового фронта скалярной структуры или поляризационной компоненты векторной структуры характеризуются целочисленным топологическим зарядом m – деленным на 2π набегом фазы при обходе дислокации по замкнутому контуру в сечении пучка. Ниже мы приведем пример и неизолрованной (краевой) дислокации волнового фронта. При ненулевых топологических зарядах поток энергии в окрестности винтовых фазовых дислокаций имеет вихревой характер. Второй тип (в общем случае) возможен лишь для поляризованного излучения с эллиптической поляризацией. Здесь различают сингулярности с чисто круговой поляризацией, когда не определено понятие большой и малой осей поляризационного эллипса (совокупность С-точек в пространстве), и с чисто линейной поляризацией при неопределенности во времени направ-

ления вращения конца вектора электрической напряженности по эллипсу (L-точки). Топологический индекс (индекс Пуанкаре η) изолированных поляризационных сингулярностей равен числу оборотов вектора поляризации при обходе сингулярной точки по такому же, как и в случае фазовых сингулярностей, контуру [80]. С учетом того, что теоретические и экспериментальные исследования диссипативных оптических солитонов описаны в значительном числе монографий [86–96, 44, 64], ниже мы представим обзор свойств таких солитонов, обладающих фазовыми и поляризационными сингулярностями, вместе с рядом оригинальных результатов. Чтобы сосредоточиться именно на этих сингулярностях, мы ограничимся здесь рассмотрением лазеров или лазерных сред класса А с быстрым насыщающимся поглотителем; анализ проявлений релаксационных процессов можно найти в [64] и приведенных там ссылках.

3.1. Диссипативные оптические солитоны с фазовыми сингулярностями

Одной из наиболее простых схем, в которой возникают диссипативные оптические солитоны, является широкоапертурный лазер с насыщающимся поглотителем, генерирующий в режиме единственной продольной моды [97]. Для поперечно-двумерного лазера уравнение для огибающей E электрической напряженности поля с преобладающей линейной поляризацией в квазиоптическом приближении и приближении среднего поля (усреднение огибающей в продольном направлении) [98] имеет безразмерный вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - (i + d) \Delta_{\perp} E = f(|E|^2) E. \tag{1}$$

Здесь $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – поперечный оператор Лапласа; x и y – поперечные координаты, ортогональные оси резонатора z . Слагаемое с лапласианом описывает дифракцию излучения (коэффициент i) и угловую селективность потерь (коэффициент d , $0 < d \ll 1$, потери для осевого направления распространения минимальны). Подчеркнем, что наличие угловой селективности потерь принципиально для обеспечения устойчивости топологических солитонов. Функция f интенсивности $I = |E|^2$ при малых частотных расстройках вещественна и может быть записана в следующем виде:

$$f(I) = -1 + \frac{g_0}{1+I} - \frac{a_0}{1+bI}. \tag{2}$$

Первый член в правой части (2) представляет собой нерезонансное поглощение; g_0 и a_0 – коэффициенты линейного усиления и поглощения; b – отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения. Эта функция отражает баланс притока (усиление) и оттока (поглощение) энергии излучения. Лазерные (диссипативные) солитоны существуют в условиях бистабильности поперечно-однородных режимов, когда устойчив безгенерационный режим $E = 0$, что реализуется при $f(0) < 0$, и режим с положительной интенсивностью (уравнение $f(I) = 0$ имеет два положительных корня).

При указанных условиях в некотором диапазоне параметров уравнение (1) имеет устойчивые решения, отвечающие осесимметричному локализованному распределению

интенсивности и различным значениям топологического заряда m . В полярных координатах (r, φ) ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$)

$$E(r, \varphi, t) = A(r) \exp(im\varphi - i\nu t). \tag{3}$$

Излучение монохроматично, частотный сдвиг ν служит собственным значением краевой задачи (1) с граничным условием $E(r, \varphi, t) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Спектр осесимметричной задачи дискретный, что отвечает калиброванности диссипативных солитонов.

Достаточно полный анализ подобных солитонов представлен в [64], где приведены и ссылки на оригинальные работы. В рассматриваемом случае фазовые сингулярности располагаются в изолированных точках поперечного сечения лазера. При выходе за рамки приближения среднего поля и учете продольного изменения огибающей в лазере с длиной резонатора L уравнение (1) заменяется следующим:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} - (i + d_{\perp}) \Delta_{\perp} E - (i + d_{\parallel}) D_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = f(|E|^2) E. \tag{4}$$

Здесь D_2 – коэффициент квадратичной дисперсии. Для кольцевого резонатора дополнительно ставится условие периодичности полной напряженности поля с периодом L . Анализ возникающих при этом «трубчатых» солитонов выполнен в [99]. В трехмерном пространстве дислокации волнового фронта располагаются на вихревых линиях в трехмерном пространстве. Эти линии можно считать ориентированными в соответствии с направлением возрастания фазы в их окрестности (на самих линиях фаза не определена). При докритических длинах резонатора, $L < L_{cr}$, вихревые линии прямые, в том числе в случае порождающих их кратных дислокаций двумерного солитона с топологическим зарядом $|m| > 1$. При большей длине L вихревые линии изгибаются (рис.4,а) и, кроме того, в случае исходных m -кратных дислокаций расщепляются на $|m|$ линий с единичным топологическим зарядом (рис.4,б).

Подобные трубчатые солитоны являются переходными между двумерными и трехмерными. При больших длинах резонатора наличие его зеркал становится несущественным и можно говорить о трехмерных солитонах в неограниченной лазерной среде (с насыщающимся поглощением). Обширный класс вихревых трехмерных лазерных солитонов найден в [100–104] и в работах, ссылки на которые представлены в [64]. На самой вихревой линии поток энергии обращается в нуль, но около нее со-

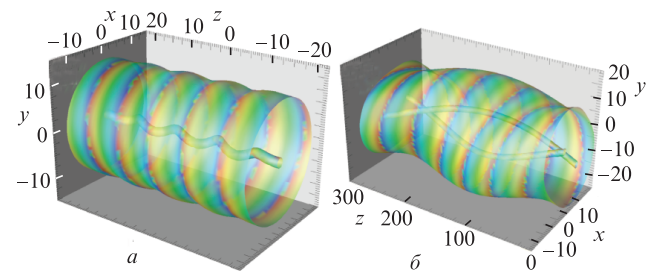


Рис.4. Поверхности изоинтенсивности трубчатых солитонов, демонстрирующие изгиб (а, $m = 1$) и расщепление (б, $m = 2$) вихревых линий трубчатых солитонов при закритической длине резонатора. Здесь и на рис.6 и 7 x , y , и z даны в длинах волн лазерного излучения.

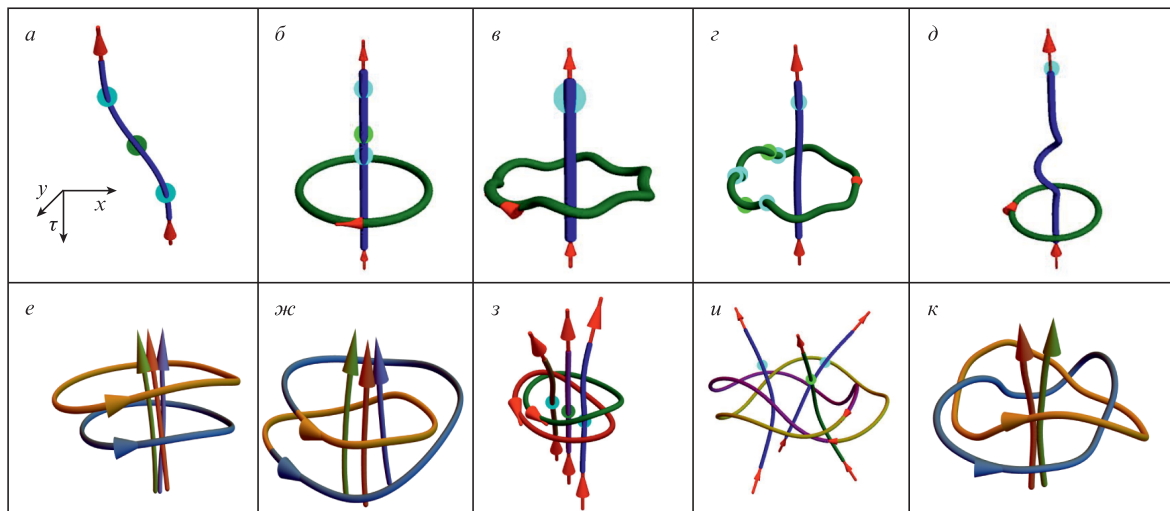


Рис.5. Вихревые линии трехмерных лазерных солитонов. Число замкнутых вихревых линий: 0 (а), 1 (б–д, жс, и) и 2 (е–з, к); представлены тривиальный узел (жс) и узел-трилистник (к). Число незамкнутых линий: 1 (а–д), 2 (к) и 3 (е–и). Стрелки на вихревых линиях указывают направление возрастания фазы излучения в окрестности линии, кружками на них (а–д, з, е) отмечены места изменения направления составляющей потока энергии вдоль касательной к вихревой линии.

ставляющая потока вдоль касательной к линии может иметь одно и то же или разное направление вдоль всей линии. В первом случае вихревую линию называем знакопостоянной, во втором – знакопеременной. Число изменений направления служит одной из характеристик вихревой линии. Набор всех вихревых линий этих солитонов с единичными топологическими зарядами образует их «скелеты» разнообразной формы. Как видно из рис.5, эти линии могут быть замкнутыми (с конечной длиной) и незамкнутыми (с бесконечной длиной в неограниченном пространстве или заканчивающимися на зеркалах в резонаторе конечной длины), связанными и несвязанными, безузловыми или узловыми с различными топологическими индексами (теория узлов излагается, например, в [105]). Использование этого класса трехмерных солитонов значительно расширяет возможности кодирования топологически защищенной информации. Дополнительно к топологическим характеристикам, информация может быть записана указанным выше числом изменений направления потока энергии.

3.2. Солитоны с поляризационными сингулярностями

3.2.1. Сингулярности двумерных лазерных солитонов. Динамика многих широкоапертурных лазеров описывается в приближении среднего поля уравнениями для двумерного распределения огибающей поля и материальными уравнениями для среды. С учетом поляризации надлежащими уравнениями для поля служат два квазиоптических уравнения для декартовых компонент векторной огибающей $\mathbf{E} = \{E_x, E_y\}$ или же для амплитуд круговой поляризации $E_{\pm} = (1/\sqrt{2})(E_x \pm iE_y)$. Динамика среды для полупроводниковых лазеров с вертикальным резонатором достаточно полно определяется уравнениями модели «вращающегося спина» (spin-flip model) [106]. Исходно четырехуровневая модель в безынерционном приближении эффективно превращается в двухуровневую. В результате для лазера с насыщающимся поглощением приходим к упрощенной системе безразмерных уравнений вида

$$\partial_t E_{\pm} - (i + d)\nabla_{\perp}^2 E_{\pm} = f(I)E_{\pm},$$

$$f(I) = -1 - \frac{a_0}{1 + I} + \frac{(1 - i\alpha)g_0}{1 + bI},$$

где $I = |E_+|^2 + |E_-|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2$ – суммарная интенсивность; α – характеризующий полупроводниковые лазеры α -фактор. В декартовых компонентах

$$\partial_t E_{x,y} - (i + d)\nabla_{\perp}^2 E_{x,y} = f(|E_x|^2 + |E_y|^2)E_{x,y}. \quad (6)$$

В более общем случае функция f зависит не только от суммы, но и от разности интенсивностей поляризационных компонент, а также учитываются не имеющие принципиального значения для данного рассмотрения быстрые осцилляции населенностей [106, 107]. Далее, следуя [108], мы проследим вытекающую из (5) и (6) поляризационную структуру диссипативных солитонов.

Очевидно, что эти уравнения инвариантны к фазовым сдвигам каждой из поляризационных компонент. Кроме того, эти системы сводятся к единственному уравнению, описывающему скалярную структуру с суммарной интенсивностью I , если у двух поляризационных компонент одно и то же распределение интенсивности, но различающиеся распределения фазы (см. примеры ниже). В этом случае мы можем получить одну из поляризационных компонент домножением скалярного распределения на множитель q , а другую компоненту – на множитель $\sqrt{1 - q^2}$, где $q = \text{const}$, $0 \leq q^2 \leq 1$ (дополнительно следует учесть различие фазовых распределений). Вследствие этого мы имеем семейство солитонов с непрерывно меняющимся параметром q (сплошной спектр).

Если применить это рассуждение к исходному скалярному солитону, у которого состояние поляризации одно и то же по всему сечению, получим

$$E_+ = qE_0, E_- = \sqrt{1 - q^2}E_0, q = \text{const}. \quad (7)$$

Соответственно $E_+/E_- = q/\sqrt{1 - q^2} = \text{const}$. Тем самым, помимо фазовых факторов, имеется порожаемое ска-

лярным солитоном однопараметрическое семейство солитонов с одинаковым состоянием поляризации.

При равных интенсивностях круговых поляризационных компонент ($q^2 = 1/2$), когда $E_+ = \pm E_-$ (случай совпадения фазовых распределений компонент), амплитуда одной декартовых компонент поляризации обращается в нуль на всей апертуре лазера, т.е. электрическая напряженность везде направлена вдоль другой оси декартовых координат (линейная поляризация). При $q = 0$ или ± 1 поляризация чисто круговая, а промежуточные значения параметра отвечают эллиптической поляризации.

Более интересным представляется вариант, в котором круговые компоненты поля соответствуют скалярным солитонам с различающимися фазовыми распределениями, но с совпадающими распределениями интенсивности. Это возможно, например, если эти компоненты отвечают скалярным симметричным вихревым солитонам с противоположными знаками топологического заряда. Для указанного выбора при $q^2 = 1/2$ имеем

$$E_{\pm}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x \pm E_y) = \exp(\pm i\eta\varphi) A_{\eta}(r), \tag{8}$$

где $A_{\eta}(r)$ – комплексная амплитуда радиального профиля скалярных симметричных солитонов с топологическими зарядами $m = \pm\eta$, являющаяся решением уравнения

$$(i + d) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\eta^2}{r^2} \right) A_{\eta}(r) + f(|A_{\eta}|^2) A_{\eta}(r) = 0. \tag{9}$$

Из (8) следует вид декартовых поляризационных компонент:

$$E_x = \sqrt{2} A_{\eta}(r) \cos(\eta\varphi), \quad E_y = \sqrt{2} A_{\eta}(r) \sin(\eta\varphi), \tag{10}$$

т.е. поляризация чисто радиальная с индексом Пуанкаре η . Область устойчивости совпадает с областью устойчивости скалярного солитона, поскольку последняя не зависит от знака топологического заряда. Что касается фазовых сингулярностей, то декартовы компоненты имеют нулевую амплитуду не в изолированных точках, а на целых линиях – осях координат. Этот вырожденный случай можно классифицировать как краевую дислокацию. Он иллюстрируется рис.6,а,б.

Вырождение фазовых сингулярностей снимается при различающихся интенсивностях компонент ($q^2 \neq 1/2$). Как видно из рис.6,в,г в этом случае имеется единственная вихревая дислокация в центре структуры. Поляризационная сингулярность с индексом Пуанкаре $\eta = 1$ сохраняется.

Из расчетов следует, что эти структуры устойчивы по отношению к малым возмущениям. Если в начальный момент суммарная интенсивность компонент отличается от интенсивности скалярного солитона, то это отличие исчезает за короткий промежуток времени, после чего устанавливается векторный сингулярный солитон, устойчивость которого реализуется в том же диапазоне параметров, что и у скалярного солитона.

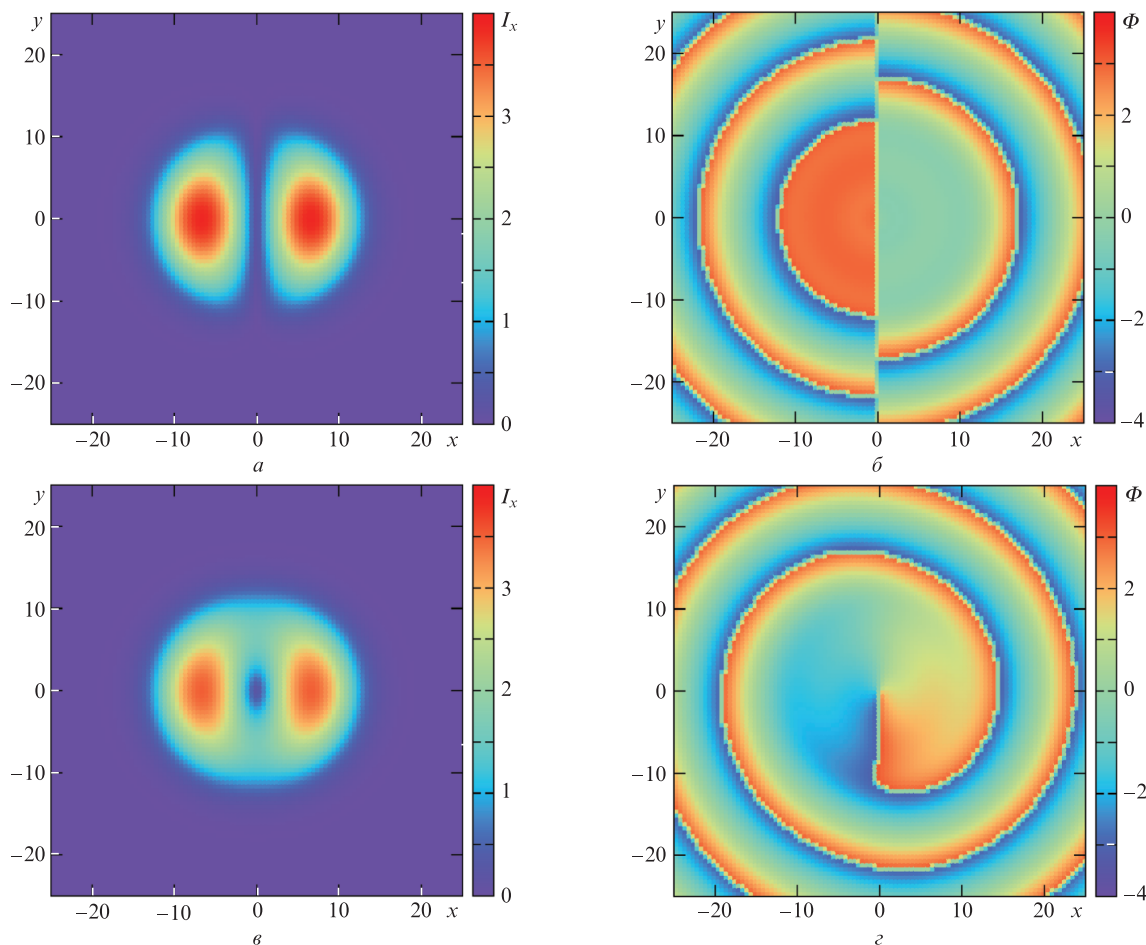


Рис.6. Распределения интенсивности декартовой компоненты $I_x = |E_x|^2$ (а, в) и ее фазы Φ (б, г) при $q^2 = 1/2$ (а, б) и $q^2 = 0.22$ (в, г); $\eta = 1, \alpha = 0$.

3.2.2. *Сингулярности трубчатых солитонов.* Трубчатые солитоны были рассмотрены в п.3.1 в параксиальном приближении, в котором излучение было линейно поляризовано (существенна только составляющая напряженности E_x). При выходе за рамки этого приближения, справедливого при условии малости параметра $k_0 w$, где k_0 – волновое число в линейной среде и w – характерная ширина структуры, возникают поправки, учитывающие более сложное поляризационное состояние излучения. Для двумерных лазерных солитонов такой слабонепараксиальный анализ был выполнен в [109], а для трубчатых солитонов – в [99]. Далее, основываясь на этих статьях, мы более полно представим поляризационную структуру трубчатых солитонов. Для этого рассмотрим представленный в п.3.1 симметричный трубчатый солитон, устойчивый в резонаторе с докритической длиной.

В исходном параксиальном приближении в цилиндрической системе координат огибающая солитона имеет вид (см. (3))

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi, t) A(r, \varphi) \exp(-iK_m z - ivt), \\ A(r, \varphi) = a(r) \exp[i\Phi_x(r, \varphi)], \\ \Phi_x(r, \varphi) = \Phi_x(r) + m\varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

где v – нелинейный сдвиг частоты; K_m – сдвиг волнового числа; $A(r, \varphi)$ – поперечный профиль огибающей поля. В первом порядке по малому параметру $k_0 w$ возникает только продольная составляющая огибающей

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi, z) \approx \frac{i}{k_0} \operatorname{div}_\perp \mathbf{E}_\perp = \frac{i}{k_0} \exp(-iK_m z) \frac{\partial}{\partial x} A(r, \varphi) \\ = \frac{i}{k_0} A(r, \varphi) [\gamma(r, \varphi) + ik(r, \varphi)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma(r, \varphi) = a^{-1}(r) \frac{\partial}{\partial x} a(r) = \gamma(r) \cos \varphi, \\ k(r, \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x(r, \varphi) = \frac{1}{r} [rk(r) \cos \varphi - m \sin \varphi], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\gamma(r) = a^{-1}(r) a'(r), \quad k(r) = \Phi'_x(r)$$

Тем самым состояние поляризации является эллиптическим и изменяющимся по поперечному сечению. Вектор электрической напряженности колеблется в плоскости (E_x, E_z) ; выход из этой плоскости связан с появлением составляющей напряженности E_y , но она мала, т. к. возникает только в следующем порядке по малому параметру $k_0 w$, который мы здесь не рассматриваем. Характеристики эллипсов поляризации задаются относительной фазой $\delta\phi(r, \varphi) = \Phi_z(r, \varphi) - \Phi_x(r, \varphi)$ [110], определяемой соотношением

$$\sin(\delta\phi) = \frac{r\gamma(r) \cos \varphi}{\sqrt{[r\gamma(r) \cos \varphi]^2 + [rk(r) - m \sin \varphi]^2}}. \quad (14)$$

Эллиптическая поляризация вырождается в линейную, когда разность фаз $\delta\phi = \pi s$, где s – целое число. Соотношение (14) позволяет найти L-линии в поперечном сечении, на которых поляризация линейна. Действительно, условие $r\gamma(r) \cos \varphi = 0$ выполняется, во-первых, на окружности, на которой интенсивность параксиального солитона максимальна, $\gamma(r) = 0$, и на оси y , ортогональной направлению поляризации этого солитона, $\cos \varphi = 0$ (рис.7). Эти две L-линии разделяют поперечное сечение на четыре области с одинаковой киральностью (направлением вращения вектора поляризации), в зависимости от положительного или отрицательного значения $\operatorname{sign}[\gamma(r) \cos \varphi] = \pm 1$.

Продольная компонента электрического вектора достигает нуля только в двух точках на пересечении окружности, отвечающей максимальной интенсивности параксиального солитона, и оси $y = 0$ (красные горизонтальные стрелки). В центре солитона весь вектор электрической напряженности равен нулю. При переходе L-линий киральность меняется на противоположную. По мере удаления от этих линий увеличивается и наклон эллипса поляризации в плоскости (E_x, E_z) , причем наклон главной оси эллипса по отношению к оси x скачком меняет свой знак при прохождении L-линии $x = 0$. Тем самым рассмотренные трубчатые солитоны обладают винтовыми дислокациями волнового фронта и поляризационными сингулярностями в виде L-линий.

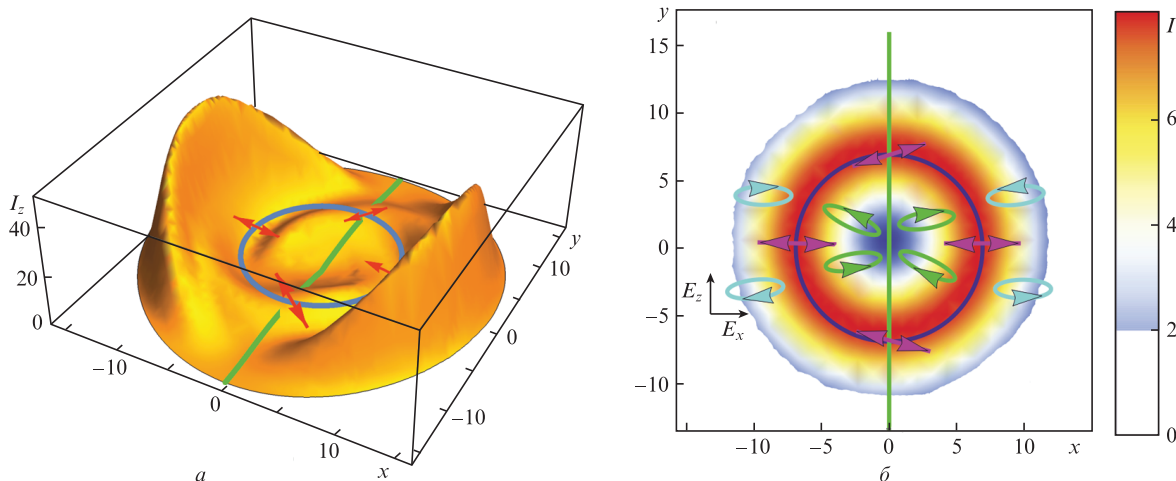


Рис.7. Эллипсы вектора поляризации в разных точках вихревого солитона $m = 1$. Распределение интенсивности в плоскости (x, y) соответствует цветовой шкале. Вектор электрической напряженности меняется в плоскости (E_x, E_z) . Стрелкой на эллипсах показано направление вращения вектора электрической напряженности во времени.

4. Заключение

Таким образом, вовлечение диссипативных факторов существенно расширяет возможности достижения как стабильных предельно коротких импульсов излучения, так и структурирования самого излучения с реализацией его сложной топологии. Здесь мы иллюстрировали это обстоятельство примерами, относящимися к лазерным схемам.

Самоиндуцированная прозрачность, открытая в самом начале лазерной эпохи, принадлежит к числу когерентных нелинейных явлений. Она имеет важное физическое значение для понимания механизма взаимодействия вещества с излучением, поскольку демонстрирует те свойства такого взаимодействия, в которых важную роль играет когерентность состояний вещества. Вместе с тем, практического применения это явление до сих пор не нашло. Одним из казавшихся возможным применений явления были попытки использовать режим СИП в поглощающей среде для синхронизации мод в лазерах. Однако принципы и технологии модуляции потерь резонаторов за счет насыщающихся поглотителей и практически безынерционных керровских линз оказались более универсальными и простыми в применении. Тем не менее такие методы пассивной синхронизации мод в лазерах имеют ряд принципиально неустранимых недостатков. Так, длительность и период следования импульсов в лазерах ограничена шириной линий усиления, а в лазерах с насыщающимся поглотителем – шириной линии поглощения. Преодолеть указанные ограничения, препятствующие получению предельно коротких импульсов излучения, можно только в режиме когерентной синхронизации мод. Практическая реализация может привести к созданию нового поколения компактных источников одноцикловых импульсов с терагерцевой частотой следования.

Возможно, что созданию таких лазеров мешают какие-то, пока нам неизвестные, трудности. Но сам эффект СИП внутри лазера вновь стал интересным и с академической точки зрения. В лазере возможны режимы с гармонической синхронизацией мод, когда в резонаторе одновременно находятся много импульсов СИП. Такую систему можно рассматривать как газ диссипативных солитонов. В подобном газе, как показали наши последние эксперименты, возникают солитонные молекулы, происходят процессы слияния и распада диссипативных солитонов СИП. Крайне интересным оказалось возникновение обнаруженных нами экстремальных событий – «волнубийца», к которым в последнее время проявляется значительный интерес. Таким образом, нелинейная динамика солитонов различной природы обогащается новыми аспектами, проявляющимися в исследованиях диссипативных лазерных солитонов СИП. Также привлекает внимание возможность создания многокаскадного оптического компрессора за счет явления СИП. Открывающиеся перспективы созвучны тенденции современной нелинейной оптики и лазерной физики к достижению все более коротких импульсов излучения.

В другом рассмотренном выше разделе нелинейной оптики раскрывается исключительно богатая внутренняя структура многомерных диссипативных оптических солитонов, связанная с топологией как фазовых, так и поляризационных сингулярностей. Эти сингулярности, в силу их топологической защищенности, перспективны для информационных приложений. Диссипативность рас-

сматриваемых лазерных систем добавляет новые аспекты, связанные с нетривиальной структурой энергетических потоков.

Исследования самоиндуцированной прозрачности для предельно коротких импульсов и экспериментальное наблюдение экстремальных событий в системе диссипативных солитонов СИП поддержаны грантом РФФ № 21-72-10028, а анализ топологических диссипативных оптических солитонов – грантом РФФ № 18-12-00075. Исследования М.В.Архипова в части выявления корреляций в многоимпульсном лазерном излучении поддержаны грантом РФФИ № 20-02-00872 а.

Исследования проведены с использованием оборудования ресурсного центра «Оптические и лазерные методы исследования вещества» Научного парка Санкт-Петербургского государственного университета.

1. Вавилов С.И. *Микроструктура света* (М.: Изд-во АН СССР, 1950).
2. Wawilow S.I., Lewshin W.L. *Z. Physik.*, **35**, 932 (1926).
3. Franken P.A., Hill A.E., Peters C.W., Weinreich G. *Phys. Rev. Lett.*, **7**, 118 (1961).
4. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М.: Изд-во Института научной информации, 1964).
5. Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М.: Мир, 1966).
6. Boyd R.W. *Nonlinear Optics* (Cambridge: Academic Press, 2020).
7. Харчиев В.Е. *Physics*, **3** (3), 143 (1967).
8. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 908 (1967).
9. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969).
10. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
11. Maimistov A.I., Basharov A.M. *Nonlinear Optical Waves* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999).
12. Крюков П.Г., Летохов В.С. *УФН*, **99**, 169 (1969) [*Sov. Phys. Usp.*, **12**, 641 (1970)].
13. Полуэктов И.А., Попов Ю.М., Ройтберг В.С. *УФН*, **114**, 97 (1974) [*Sov. Phys. Usp.*, **18**, 673 (1975)].
14. Полуэктов И.А., Попов Ю.М., Ройтберг В.С. *Квантовая электроника*, **1**, 757 (1974) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **4**, 423 (1974)].
15. Полуэктов И.А., Попов Ю.М., Ройтберг В.С. *Квантовая электроника*, **1**, 1309 (1974) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **4**, 719 (1974)].
16. Maimistov A.I., Basharov A.M., Elyutin S.O., Sklyarov Y.M. *Phys. Rep.*, **191**, 1 (1990).
17. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30**, 287 (2000) [*Quantum Electron.*, **30**, 287 (2000)].
18. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **40**, 756 (2010) [*Quantum Electron.*, **40**, 756 (2010)].
19. Пархоменко А.Ю., Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **114**, 1595 (1998) [*JETP*, **87**, 864 (1998)].
20. Сазонов С.В. *Вестник ИТМО*, **13**, 1 (2013).
21. Gibbs H.M., Slusher R.E. *Appl. Phys. Lett.*, **18**, 505 (1971).
22. Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Рипол классик, 1989).
23. Fox A.G., Schwarz S.E., Smith P.W. *Appl. Phys. Lett.*, **12**, 371 (1968).
24. Diels J.C., Rudolph W. *Ultrashort Laser Pulse Phenomena* (Elsevier, 2006).
25. Keller U. *Appl. Phys. B*, **100**, 15 (2010).
26. Крюков П.Г. *УФН*, **183**, 897 (2013) [*Phys. Usp.*, **56**, 849 (2013)].
27. Крюков П.Г. *Квантовая электроника*, **31**, 95 (2001) [*Quantum Electron.*, **31**, 95 (2001)].
28. Крюков П.Г. *Квантовая электроника*, **49**, 895 (2019) [*Quantum Electron.*, **49**, 895 (2019)].
29. Runge P.K. *Opt. Commun.*, **4**, 195 (1971).
30. Runge P.K. *Opt. Commun.*, **5**, 311 (1972).
31. Meyer Y.H. *Opt. Commun.*, **19**, 343 (1976).
32. Dujardin G., Meyer Y.H. *Opt. Commun.*, **24**, 21 (1978).
33. Meyer Y.H., Loth C., Astier R. *Opt. Commun.*, **25**, 100 (1978).
34. Рубинов А.Н., Белоконов М.В., Адамушко А.В. *Квантовая электроника*, **6**, 723 (1979) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **9**, 433 (1979)].
35. Апанасевич П.А., Афанасьев А.А., Урбанович А.И. *Квантовая электроника*, **9**, 827 (1982) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **12**, 522 (1982)].

36. Васильев В.В., Егоров В.С., Чехонин И.А. *Оптика и спектроскопия*, **58**, 944 (1985) [*Opt. Spectr.*, **58**, 578 (1985)].
37. Васильев В.В., Егоров В.С., Чехонин И.А. *Оптика и спектроскопия*, **60**, 664 (1986) [*Opt. Spectr.*, **60**, 405 (1986)].
38. Комаров К.П., Угожаев В.Д. *Квантовая электроника*, **11**, 1167 (1984) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **14**, 787 (1984)].
39. Kozlov V.V. *Phys. Rev. A*, **56**, 1607 (1997).
40. Kalosha V.P., Müller M., Herrmann J. *Opt. Lett.*, **23**, 117 (1998).
41. Kalosha V.P., Müller M., Herrmann J. *J. Opt. Soc. Am. B*, **16**, 323 (1999).
42. Menyuk C.R., Talukder M.A. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 023903 (2009).
43. Menyuk C., Talukder M.A. *Phys. Rev. A*, **79**, 063841 (2009).
44. Розанов Н.Н. *Диссипативные оптические солитоны. От микро-к нано- и атто-* (М.: Физматлит, 2011).
45. Архипов Р.М., Архипов М.В., Бабушкин И.В. *Письма в ЖЭТФ*, **101**, 164 (2015) [*JETP Lett.*, **101**, 149 (2015)].
46. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I. *Opt. Commun.*, **361**, 73 (2016).
47. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I., Rosanov N.N. *Opt. Lett.*, **41**, 737 (2016).
48. Архипов М.В., Архипов Р.М., Шимко А.А., Бабушкин И.В. *Письма в ЖЭТФ*, **101**, 250 (2015) [*JETP Lett.*, **101**, 232 (2015)].
49. Arkhipov M.V., Shimko A.A., Arkhipov R.M., Babushkin I., Kalinichev A.A., Demircan A., Morgner U., Rosanov N.N. *Laser Phys. Lett.*, **15**, 075003 (2018).
50. Masuda K., Affolderbach C., Mileti G., Diels J.C., Arissian L. *Opt. Lett.*, **40**, 2146 (2015).
51. Архипов М.В., Архипов Р.М., Шимко А.А., Бабушкин И., Розанов Н.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **109**, 657 (2019) [*JETP Lett.*, **109**, 634 (2019)].
52. Arkhipov M.V., Shimko A.A., Rosanov N.N., Babushkin I., Arkhipov R.M. *Phys. Rev. A*, **101**, 013803 (2020).
53. Arkhipov M.V., Arkhipov R.M., Shimko A.A., Babushkin I., Rosanov N.N. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **1410**, 012102 (2019).
54. Архипов Р.М., Архипов М.В., Бабушкин И., Розанов Н.Н. *Изв. РАН. Сер. физ.*, **84**, 23 (2020) [*Bulletin Rus Acad. Sci.: Physics*, **84**, 23 (2020)].
55. Архипов М.В., Архипов Р.М., Шимко А.А., Бабушкин И., Розанов Н.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **109**, 657 (2019) [*JETP Lett.*, **109**, 634 (2019)].
56. Kozlov V.V., Rosanov N.N., Wabnitz S. *Phys. Rev. A*, **84**, 053810 (2011).
57. Kozlov V.V., Rosanov N.N. *Phys. Rev. A*, **87**, 043836 (2013).
58. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Семенов В.Е. *Письма в ЖЭТФ*, **83**, 337 (2006) [*JETP Lett.*, **83**, 279 (2006)].
59. Rosanov N.N., Semenov V.E., Vyssotina N.V. *Laser Phys.*, **17**, 1311 (2007).
60. Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Высотина Н.В. *Квантовая электроника*, **38**, 137 (2008) [*Quantum Electron.*, **38**, 137 (2008)].
61. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Семенов В.Е. *Оптика и спектроскопия*, 106, 793 (2009) [*Opt. Spectrosc.*, **106**, 713 (2009)].
62. Розанов Н.Н., Архипов Р.М., Архипов М.В. *УФН*, **188**, 1347 (2018) [*Phys. Usp.*, **61**, 1227 (2018)].
63. Архипов Р.М., Архипов М.В., Розанов Н.Н. *Квантовая электроника*, **50**, 801 (2020) [*Quantum Electron.*, **50**, 801 (2020)].
64. Розанов Н.Н. *Диссипативные оптические и родственные солитоны* (М.: Физматлит, 2021).
65. Bullough R.K., Ahmad F. *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 330 (1971).
66. Arkhipov R., Pakhomov A., Arkhipov M., Babushkin I., Rosanov N. *Sci. Rep.*, **11**, 1147 (2021).
67. Kharif S., Pelinovsky E., Slunyaev A. *Rogue Waves in the Ocean* (Berlin: Springer, 2008).
68. Solli D.R., Ropers C., Koonath P., Jalali B. *Nature*, **450**, 1054 (2007).
69. Dudley J.M., Genty G., Mussot A., Chabchoub A., Dias F. *Nature Rev. Phys.*, **1**, 675 (2019).
70. Архипов Р.М., Архипов М.В., Шимко А.А., Бабушкин И.В., Розанов Н.Н., в *Сб. трудов XII Международной конф. «Фундаментальные проблемы оптики – 2020»* (СПб: Ун-т ИТМО, 2020, с. 118).
71. Arkhipov R., Arkhipov M., Demircan A., Morgner U., Babushkin I., Rosanov N. *Opt. Express*, **29**, 10134 (2021).
72. Архипов Р.М., Архипов М.В., Федоров С.В., Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **129**, 1286 (2021) [*Opt. Spectrosc.*, **129** (10) (2021)].
73. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I.V., Demircan A., Morgner U., Rosanov N.N. *Opt. Lett.*, **44**, 1202 (2019).
74. Розанов Н.Н., Высотина Н.В. *ЖЭТФ*, **157**, 63 (2020) [*JETP*, **130**, 52 (2020)].
75. Aleksandrov I.A., Tumakov D.A., Kudlis A., Shabaev V.M., Rosanov N.N. *Phys. Rev. A*, **102**, 023102 (2020).
76. Arkhipov R., Pakhomov A., Arkhipov M., Demircan A., Morgner U., Rosanov N., Babushkin I. *Opt. Express*, **28**, 17020 (2020).
77. Архипов Р.М. *Письма в ЖЭТФ*, **113**, 636 (2021) [*JETP Lett.*, **113**, 611 (2021)].
78. Архипов Р.М., Архипов М.В., Бабушкин И., Пахомов А.В., Розанов Н.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **114**, 298 (2021) [*JETP Lett.*, **114**, 250 (2021)].
79. Розанов Н.Н., Архипов М.В., Архипов Р.М., Веретенев Н.А., Пахомов А.В., Федоров С.В. *Оптика и спектроскопия*, **127**, 82 (2019) [*Opt. Spectrosc.*, **127**, 77 (2019)].
80. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (М.: МЦНМО, 2012).
81. Simon D.S. *Topology in Optics: Tying Light in Knots* (IOP Publ., 2021).
82. Ruchi, Senthilkumaran P., Pal S.K. *Int. J. Opt.*, **2020**, 2812803 (2020).
83. Soskin M.S., Vasnetsov M.V. *Progr. Opt.*, **42**, 219 (2001).
84. Freund I. *Opt. Commun.*, **201**, 251 (2002).
85. Berry M.V., Dennis M.R. *Proc. R. Soc. London A*, **457**, 141 (2001).
86. *Новые физические принципы оптической обработки информации*. Под ред. С.А.Ахманова и В.А.Воронцова (М.: Наука, 1990).
87. Mandel P. *Theoretical Problems in Cavity Nonlinear Optics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).
88. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. *Солитоны: нелинейные импульсы и лучи* (М.: Физматлит, 2003).
89. Розанов Н.Н. *Оптическая стабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах* (М.: Наука, 1997).
90. Rosanov N.N. *Spatial Hysteresis and Optical Patterns* (Berlin: Springer, 2002).
91. Staliunas K., Sanchez-Morcillo V.J. *Transverse Patterns in Nonlinear Optical Resonators* (Berlin: Springer Verlag, 2003, p. 183).
92. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005).
93. *Диссипативные солитоны*. Под ред. Н.Ахмедиева и А.Анкиевича (М.: Физматлит, 2008).
94. *Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine*. Eds by N.Akhmediev and A.Ankiewicz (Berlin: Springer, 2008).
95. Lugiato L., Prati F., Brambilla M. *Nonlinear Optical Systems* (Cambridge: Cambridge University Press, 2015).
96. *Nonlinear Optical Cavity Dynamics*. Ed. by P.Grelu (Weinhein: Wiley-VCH, 2016).
97. Розанов Н.Н., Федоров С.В. *Оптика и спектроскопия*, **72**, 1394 (1992) [*Opt. Spectr.*, **72**, 782 (1992)].
98. Сучков А.Ф. *ЖЭТФ*, **49**, 1495 (1965) [*Sov. Phys. JETP*, **22**, 1026 (1965)].
99. Veretenov N., Fedorov S., Rosanov N. *Opt. Lett.*, **46**, 4076 (2021).
100. Veretenov N.A., Rosanov N.N., Fedorov S.V. *Phys. Rev. Lett.*, **117**, 183901 (2016).
101. Veretenov N.A., Fedorov S.V., Rosanov N.N. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 263901 (2017).
102. Fedorov S.V., Veretenov N.A., Rosanov N.N. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 023903 (2019).
103. Veretenov N.A., Fedorov S.V., Rosanov N.N. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **376**, 20170367 (2018).
104. Федоров С.В., Розанов Н.Н., Веретенев Н.А. *Письма в ЖЭТФ*, **107**, 342 (2018) [*JETP Lett.*, **107**, 327 (2018)].
105. Kawauchi A. *A Survey of Knot Theory* (Birkhauser: Verlag, 1996).
106. San Miguel M., Feng Q., Moloney J.V. *Phys. Rev. A*, **52**, 1728 (1995).
107. Panajotov K., Tlidi M. *Opt. Lett.*, **43**, 5663 (2018).
108. Fedorov S.V., Veretenov N.A., Rosanov N.N., submitted.
109. Розанов Н.Н. *Квантовая электроника*, **30**, 1005 (2000) [*Quantum Electron.*, **30**, 1005 (2000)].
110. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1970).