УПРАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРАМИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Модуляция и усиление волновых пакетов в усилителях с бегущей волной показателя преломления

И.О.Золотовский, А.С.Кадочкин, В.А.Лапин, Д.Г.Санников, М.С.Явтушенко

Исследованы условия частотной модуляции, спектрального уширения и усиления гауссова импульса – волнового пакета (ВП) типа моды шепчущей галереи (МШГ), распространяющегося по спиральной траектории на поверхности активного световода в форме цилиндра, в котором создается бегущая волна показателя преломления (БВПП). Получены аналитические выражения для зависимостей длительности, чирпа и спектральной ширины импульса от проходимого им по волноводу расстояния, параметров световода и вводимого в него излучения. Показано, что взаимодействие волнового пакета с БВПП приводит к сильной частотной модуляции усиливаемого импульса при сохраняющейся линейности чирпа. Указано, что данное обстоятельство может быть использовано для генерации пико- и субпикосекундных импульсов с пиковыми мощностями свыше 100 кВт.

Ключевые слова: *световоды, бегущая волна показателя преломления, усиление импульсов, частотная модуляция импульсов.*

1. Введение

Известно, что при распространении светового импульса по световоду, в котором сформирована бегущая волна показателя преломления (БВПП), могут наблюдаться эффекты, отсутствующие в световодах со стационарными параметрами [1, 2]. Так, в работах [3–5] исследовались эффекты, связанные с изменением поляризации и смещением несущей частоты квазимонохроматических волновых пакетов под влиянием БВПП. В работах [6–9] рассматривалось формирование солитоноподобных волновых пакетов, а также развитие индуцированной модуляционной неустойчивости и генерация пикосекундных импульсов в подобного рода световодах. При этом синхронизация скоростей БВПП и модулируемого электромагнитного излучения является сложной задачей. В настоящей работе рассматривается схема синхронизации БВПП и волновых пакетов типа моды шепчущей галереи (МШГ), распространяющихся по поверхностям соответствующих модулируемых волноводов.

Поверхностные волны типа МШГ возникают в осесимметричных системах и формируются на изогнутых границах раздела двух сред и, несмотря на давнюю историю [10], остаются интересными для исследователей в разных областях физики. Электромагнитные МШГ могут быть обнаружены, например, в диэлектрических волноводах сферической, сфероидальной, тороидальной, цилиндрической форм [2, 11, 12]. В последнем случае подобного рода волновые пакеты распространяются вдоль поверхности кварцевого световода в форме цилиндра по спирали с постоянным шагом, в силу чего они получили название туннелирующих мод [13]. Среди особенностей таких спиральных волн важным является то обстоятельство, что их продольная (вдоль оси световода) групповая скорость может быть сколь угодно меньше скорости света в вакууме [7, 14].

Рассмотрим динамику волнового пакета типа МШГ в световоде с БВПП. Модулируемые и усиливаемые волновые пакеты (ВП) вводятся в цилиндрический световод таким образом, что они распространяются вдоль него по спирали (рис.1), причем величина шага спирали определяет продольную компоненту групповой скорости ВП. Благодаря малому шагу спирали [7–9] можно синхронизировать скорости модулируемого ВП и БВПП и, в конечном итоге, обеспечить эффективные усиление и модуляцию ВП.

2. Основные уравнения

При введении света в цилиндрический волновод под некоторым углом θ к образующей цилиндра (рис.2) поверхностная волна распространяется по спиральной (см. рис.1) траектории [7]. Продольная (β_z) и поперечная (радиальная, β_r) компоненты волнового вектора $\beta = n_0\omega/c$ такой волны связаны соотношением $\beta_z = (\beta^2 - \beta_r^2)^{1/2}$, где $n_0(\omega)$ – показатель преломления материала световода. Если угол ввода волны в световод θ мал, т. е. направление ввода находится достаточно близко к поперечному сечению световода (линия *6* на рис.2), то распространение волны вдоль его оси существенно замедляется вплоть до нулевых значений (при $\theta = 0$) продольной компоненты скорости: $V_z \to 0$.

В дальнейшем мы рассматриваем случай поверхностной волны, медленно туннелирующей вдоль продольной оси световода z со скоростью $V_z \ll c$, что возможно при $\beta_z \ll \beta \approx \beta_r$. В этом случае электрическое поле волны можно представить в следующем виде:

И.О.Золотовский, А.С.Кадочкин, В.А.Лапин, Д.Г.Санников, М.С.Явтушенко. Ульяновский государственный университет, Россия, 432970 Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42;
e-mail: rafzol.14@mail.ru, myavtushenko@mail.ru

Поступила в редакцию 16 июня 2020 г., после доработки – 19 августа 2020 г.

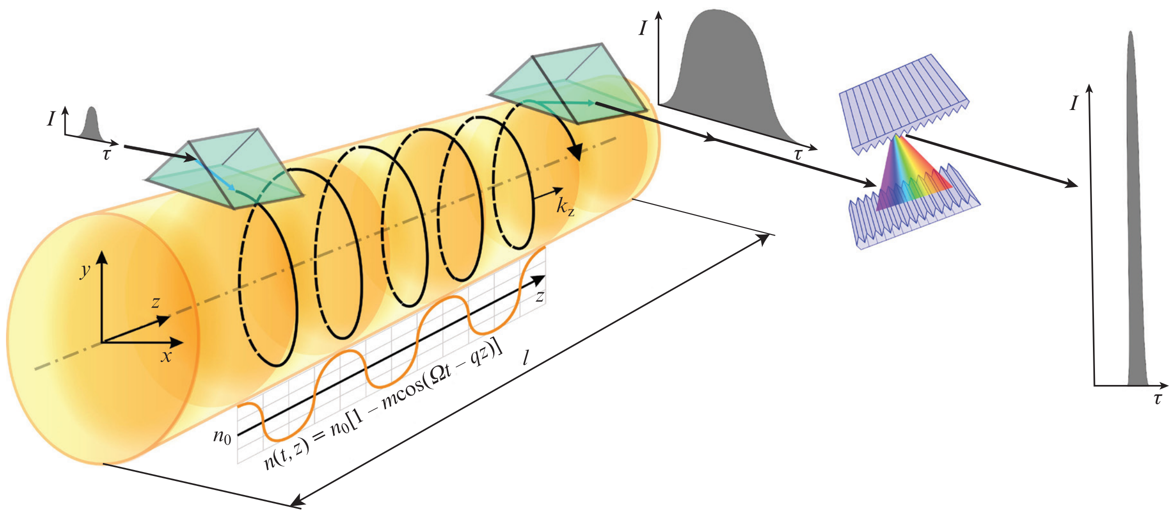

Рис.1. Схема эксперимента по усилению и частотной модуляции ВП в световоде с БВПП и дальнейшего сжатия пакета. Изображены призменный вариант ввода излучения в световод, туннелирующая оптическая волна (спираль), БВПП, входной и выходной импульсы, пара дифракционных решеток-компрессоров.

$$E(z,t,r,\varphi) = A(z,t)\Phi(z,r,\varphi)$$

$$\times\exp\left(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\int_0^z \beta_z(z)\,\mathrm{d}z\right) + \text{c.c.}, \qquad (1)$$

где $A(z,t)$ – медленно меняющаяся амплитуда, описывающая продольное (вдоль оси z) распределение поля туннелирующей волны, а $\Phi(z,r,\varphi)$ – функция, определяющая радиальную и азимутальную зависимости поля в световоде.

Пусть в цилиндрическом световоде возбуждена БВПП, и его показатель преломления (ПП) определяется как [1–3, 7–9]

$$n(t,z) = n_0[1 - m\cos(\Omega t - qz + \psi)] + n^{(2)}I, \qquad (2)$$

где Ω – частота модуляции БВПП; $q = 2\pi/\Lambda$ – волновое число; Λ – период пространственной неоднородности БВПП; $V_{\rm m} = \Omega/q$ – скорость перемещения (фазовая скорость) БВПП; $m = \Delta n/n_0$ – глубина модуляции БВПП; Δn – амплитуда изменения БВПП; ψ – фазовый сдвиг, определяющийся временем рассогласования в точке ввода между максимумом БВПП и максимумом огибающей ВП; $I = |A|^2$ – интенсивность распространяющегося излучения; $n^{(2)}$ – нелинейный показатель преломления [15].

Пусть в световод под углом θ к его поперечному сечению, попутно с БВПП вида (2), вводится гауссов частотно-модулированный (ЧМ) импульс вида [15, 16]

$$A(z=0,t) = A_0\exp[-(\tau_0^{-2}/2 - \mathrm{i}\alpha_0)t^2], \qquad (3)$$

где A_0 – пиковое значение амплитуды импульса на входе в световод; τ_0 и α_0 – начальные длительность и скорость частотной модуляции (чирп) импульса. В этом случае траектория волнового пакета имеет вид спирали, шаг которой зависит от угла θ (рис.2). При синхронизации скоростей ВП и БВПП, когда выполняется условие $V_z = V_{\rm m}$, имеем $\sin\theta = nV_z/c = nV_{\rm m}/c \approx \theta$. Кроме того, будем считать ВП и БВПП синхронизированными по времени, когда максимум огибающей ВП движется вместе с максимумом БВПП, т. е. $\psi = 0$.

Перейдем в систему отсчета, связанную с движущимся по спирали оптическим импульсом. Эффективная оптическая длина ξ, проходимая импульсом по поверхности световода, связана с углом его ввода θ: $\partial\xi = \partial z/\sin\theta \approx (c/nV_{\rm m})\partial z$, а связанное с ВП бегущее время $\tau = t - (\partial\beta/\partial\omega)_{\omega=\omega_0}\xi \approx t - n\xi/c$. Тогда динамика ВП в координатах (ξ,τ) с учетом (2) может быть описана следующим соотношением [15]:

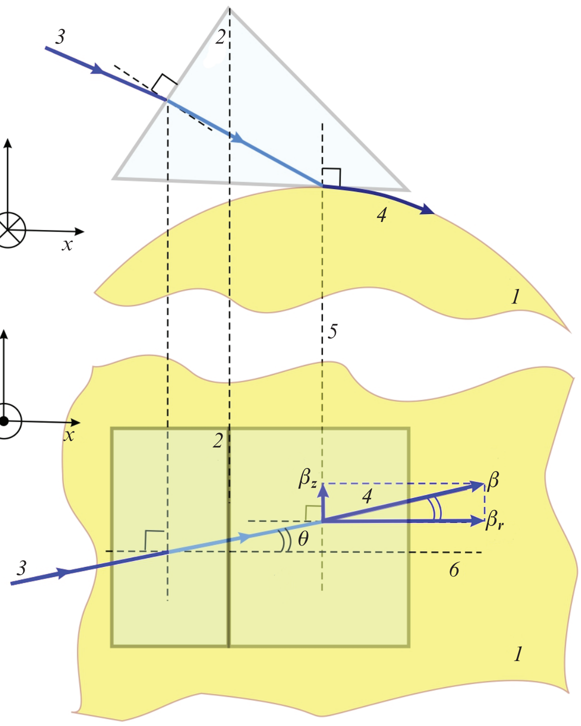

Рис.2. Схема ввода излучения в световод с помощью призмы [23] – вид на призму и световод в поперечнике (вверху) и на световод и призму сверху (внизу):
1 – световод; *2* – призма; *3* – вводимое излучение; *4* – поверхностная волна; *5, 6* – образующая цилиндрического волновода и его поперечное сечение; θ – угол между направлением ввода излучения в цилиндрический волновод и его поперечным сечением; β, β_z, β_r – волновой вектор и его продольная и поперечная компоненты.

$$\frac{\partial A}{\partial\xi} - \mathrm{i}\frac{d_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial\tau^2} + \frac{d_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial\tau^3} + \mathrm{i}R\left(|A|^2 - \tau_{\rm R}\frac{\partial|A|^2}{\partial\tau}\right)A =$$

$$= \mathrm{i}\beta m \cos[\Omega(\tau - \delta\tau)]\, A + gA. \qquad (4)$$

Здесь $d_n = (\partial^n\beta/\partial\omega^n)_{\omega_0}\,(n = 1, 2, 3)$ – дисперсионные параметры высших порядков; τ_R – параметр, характеризующий эффект вынужденного комбинационного саморассеяния среды [15, 16], приблизительно равный нелинейному времени ее отклика; $g(\omega) = g_0[1 + (\omega - \omega_\mathrm{res})^2/\Delta\omega_\mathrm{lin}^2]^{-1}$ – коэффициент усиления активного световода; ω_res – резонансная частота линии усиления; $\Delta\omega_\mathrm{lin}$ – ширина линии усиления активной среды; $R = \omega_0 n^{(2)}/(cS_\mathrm{eff})$ – параметр нелинейности, где

$$S_\mathrm{eff}(z) = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} r\left|\Phi(z,r,\varphi)\right|^2 \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\right)^2$$

$$\times\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} r\left|\Phi(z,r,\varphi)\right|^4 \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\right)^{-1} \qquad (5)$$

– эффективная площадь моды волнового пакета.

Следует отдельно отметить, что при достаточно большой глубине модуляции ПП, когда $|m| \gg 10^{-5}$, можно говорить о возможности «затягивания» волнового пакета в область максимума показателя преломления БВПП даже в том случае, если изначально у ВП типа МШГ нет продольной составляющей групповой скорости, т. е. когда $\beta_z = 0, \beta_r = \beta$.

Таким образом, описаны два сценария реализации медленного туннелирования волны вдоль цилиндра с распространяющейся в нем БВПП. Очевидно, что оптимальная синхронизация туннелирующего ВП и БВПП достигается в результате сочетания двух факторов: ввода ВП под малым углом θ, при котором $V_z \approx V_\mathrm{m}$, и удержания режима автосинхронизации ВП с максимумом ПП за счет большой глубины модуляции m. При этом как в первом, так и во втором случае с хорошей степенью точности можно считать, что $\delta\tau \to 0$.

Рассматриваемое взаимодействие ВП и БВПП на практике может быть реализовано при возбуждении в световоде акустической волны, фазовая скорость которой $V_\mathrm{m} \approx 6000$ м/с. В кварцевом световоде со стандартным значением ПП $n \approx 1.5$ для синхронизации туннелирующего ВП и БВПП необходимо иметь $\theta \approx V_\mathrm{m} n/c \approx 3 \times 10^{-5}$. При этом глубина модуляции m может достигать больших значений: $m = 4 \times 10^{-4}$ [17].

Усиление в соответствующем цилиндрическом световоде с большой площадью поверхности можно реализовать за счет его легирования (например, ионами эрбия, висмута или иттербия) и использования стандартных способов накачки через оболочку [18–20].

Заметим, что предлагаемая схема генерации широкополосных импульсов имеет определенные аналогии с известным в квантовой электронике режимом бегущей волны накачки, в котором ее движение по активной среде синхронизируется с движением генерируемого импульса [17, 21, 22]. Вероятно, в этом случае глубина модуляции может достигать (не превышая) $m \sim 10^{-5}$, а эффективная длина взаимодействия может значительно превышать метровые длины.

Численный анализ уравнения (4) с учетом влияния дисперсионных эффектов высших порядков показывает, что на участке активного световода, для которого справедливо неравенство $\xi \ll \tau_0^2/|d_2|$, с хорошей степенью точности (см. Приложение) можно считать, что

$$\alpha(\xi) \approx \alpha_0 + m n_0 \omega_0 \Omega^2 \xi/c, \qquad (6а)$$

притом что длительность ВП на этой длине остается практически неизменной, т. е.

$$\tau_\mathrm{p}(\xi) = \tau_0. \qquad (6б)$$

В этом случае при взаимодействии ВП с БВПП возможна его сверхбыстрая модуляция при сохраняющейся линейности чирпа и растущей ширине спектра. Это в свою очередь делает возможным дальнейшее сжатие импульса с помощью стандартных методов, например на дифракционных решетках (см. рис.1). Если же у импульса сформировался отрицательный чирп, то для дальнейшего сжатия импульса можно использовать обычный световод с нормальной материальной дисперсией.

В соответствии с [15] минимально возможная длительность импульса после его компрессии

$$\tau_\mathrm{min} \approx \Delta\omega^{-1} \approx |\alpha(L)\tau_\mathrm{p}(L)|^{-1} \qquad (7)$$

(L – длина пути, пройденного ВП по поверхности световода), а ширина линии импульса с огибающей вида (2)

$$\Delta\omega = \tau_\mathrm{p}^{-1}\sqrt{1 + \alpha^2\tau_\mathrm{p}^4}\,. \qquad (8)$$

Пусть исходный импульс с длительностью $\tau_0 = 10^{-11}$ с и нулевым начальным чирпом $\alpha_0 = 0$ (т. е. импульс является спектрально ограниченным) вводится в световод-модулятор со следующими параметрами: глубина и частота модуляции $m\beta = \pm 10^4$ м$^{-1}$ и $\Omega = 5 \times 10^{10}$ с$^{-1}$ соответственно, дисперсия групповых скоростей $|d_2| = 10^{-26}–10^{-27}$ с^2/м. Тогда на выходе из такого световода длиной $l = 4$ см импульс приобретет эффективный чирп $|\alpha(L)| \approx 10^{24}$ с$^{-2}$, а его длительность существенным образом не изменится. Впоследствии, после пропускания такого импульса через диспергирующий элемент, обеспечивающий временную компрессию импульса (например, через дифракционную решетку, см. рис.1), его длительность может уменьшиться в 100 раз, до 10^{-13} с.

3. Численное моделирование

С помощью численного моделирования уравнений распространения (4) рассмотрим возможности спектрального уширения и усиления ЧМ импульса вида (2) с сохранением линейной скорости частотной модуляции в активной среде с БВПП. При численном моделировании использовался фурье-метод расщепления по физическим параметрам (SSFM-метод) [15].

На рис.3 представлена динамика огибающей ЧМ импульса (рис.3,*а*) и его спектра (рис.3,*б*) в активном световоде с реализуемой БВПП при нелинейности $R = 10^{-7}$, 10^{-5}, 10^{-3} Вт$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ (кривые *1*–*3* соответственно). Начальные параметры вводимого импульса: длительность $\tau_0 = 10^{-11}$ с, пиковая мощность $P_0 = 10$ Вт. Кроме того, мы полагаем, что на входе в световод-модулятор импульс является спектрально ограниченным, т. е. $\alpha_0 = 0$. Параметры среды с реализуемой БВПП следующие: частота БВПП $\Omega = 10^9$ с$^{-1}$, глубина модуляции ПП $\Delta n = 10^{-4}$, волновое число $\beta = 10^7$ м$^{-1}$, нормальная дисперсия второго порядка $d_2 = 10^{-26}$ с^2/м и дисперсия третьего порядка $d_3 = 10^{-39}$ с^3/м. Оптическая длина пути импульса в световоде ξ взята равной 500 м. При этом предполагается, что $\delta\tau \to 0$. Па-

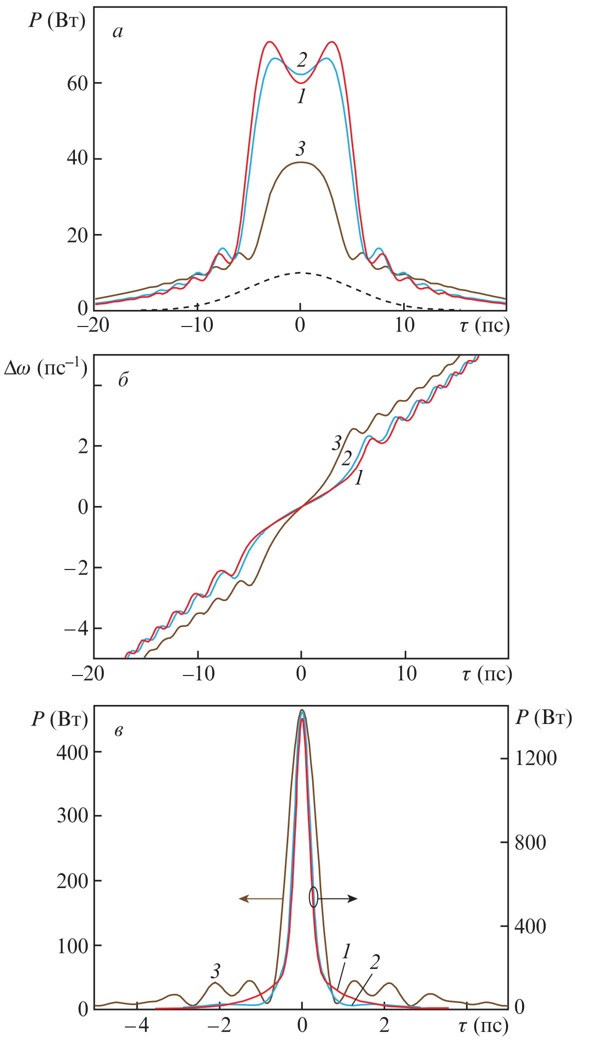

Рис.3. Динамика огибающей (*а*), спектра (*б*) импульса в световоде с БВПП, а также его последующее сжатие (*в*) на решетке с дисперсионным параметром $D_g = -10^{-24}$ с^2. Параметры моделирования: $R = 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}$ Вт$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ (*1*–*3*), ширина линии усиления $\Delta\omega_{\rm lin} = 10^{11}$ с$^{-1}$. Параметры входного импульса (штриховая кривая): длительность $\tau_0 = 10^{-11}$ с, пиковая мощность $P_0 = 10$ Вт. Цветные варианты рис.3 и 4 помещены на сайте нашего журнала http://www.quantum-electron.ru.

раметры линии усиления среды таковы: $g(\omega) = g_0[1 + (\omega - \omega_0)^2/\Delta\omega_{\rm lin}^2]^{-1}$, $g_0 \approx 10^{-2}$ м$^{-1}$, $\Delta\omega_{\rm lin} = 10^{11}$ с$^{-1}$. Как видно из рис.3,*б*, импульс приобретает практически линейный чирп, значительно уширяется, а его пиковая мощность на выходе из световода с БВПП увеличивается в четыре (кривые *1*, *2*) и шесть (кривая *3*) раз. Пропустив затем такой импульс через диспергирующий элемент (в нашем случае – через дифракционную решетку с $D_g = -10^{-24}$ с^2 [15, 16]), можно обеспечить его сильное сжатие, при этом его пиковая мощность возрастет более чем на порядок. Из рис.3 следует, что широкополосный ВП с шириной спектра $\Delta\omega > 10^{12}$ с$^{-1}$ может эффективно усиливаться, сохраняя свою форму, в среде со значительно меньшей шириной линии усиления ($\Delta\omega_{\rm lin} = 10^{11}$ с$^{-1}$). При этом импульс в соответствующем усилителе сохраняет практически линейный чирп, что обеспечивает его дальнейшее эффективное сжатие на дифракционной решетке до субпикосекундных длительностей и киловаттных пиковых мощностей. Из рис.3 видно, что эффективность усиления определяется величиной кубической (керровской) нелинейности R. В данном случае при достигаемых мощностях эффективность усиления выходит на некоторые оптимальные значения при $R < 10^{-3}$ Вт$^{-1}\cdot$м$^{-1}$. Уменьшить влияние нелинейности можно за счет увеличения эффективной площади $S_{\rm eff}$ (расфокусировки) модулируемого и усиливаемого волнового пакета [15]. При этом эффективное усиление импульса с шириной спектра свыше 10 нм оказывается возможным (в случае использования усилителей с БВПП) даже при ширине линии усилителя менее 0.1 нм. С другой стороны, использование более широкополосных усилителей способно обеспечить генерацию импульсов с существенно большей, чем у узкополосных усилителей, энергией.

На рис.4 приведены результаты расчета динамики широкополосного волнового пакета, распространяющегося в модулированном усилителе с шириной линии усиления $\Delta\omega_{\rm lin} = 10^{12}$ с$^{-1}$. Прочие параметры вводимого излучения и среды такие же, как и для рис.3. Видно, что энергия получаемых импульсов значительно больше, чем в предыдущем случае, и что эффективность конечной компрессии импульсов определяется величиной эффективного нелинейного параметра R: для используемых начальных параметров $g_0 \approx 10^{-2}$ м$^{-1}$ и $P_0 = 10$ Вт степень конечной компрессии для нелинейностей $R < 10^{-5}$ Вт$^{-1}\cdot$м$^{-1}$

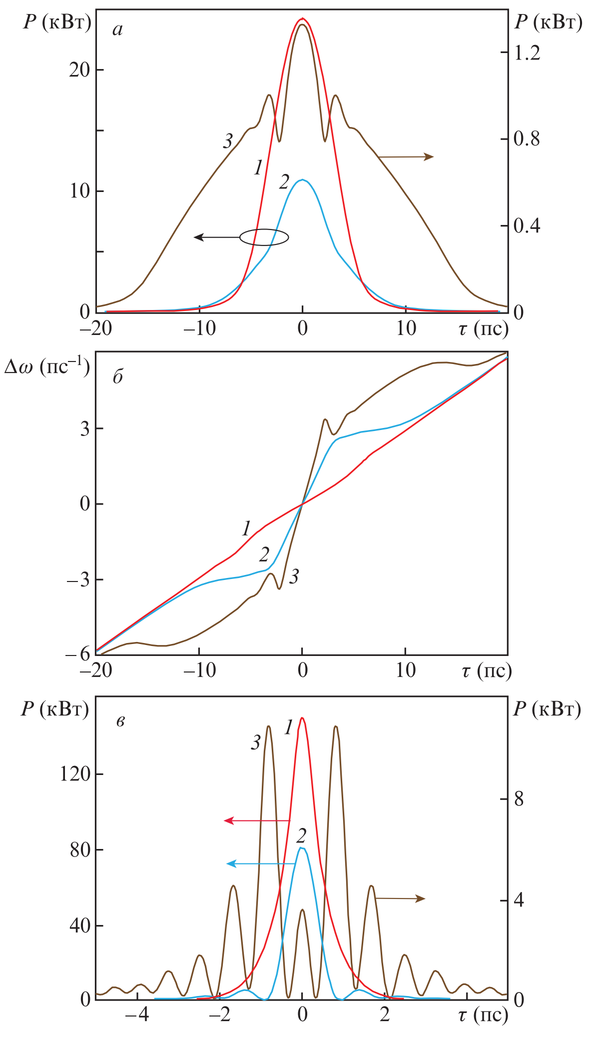

Рис.4. Динамика огибающей (*а*) и спектра (*б*) импульса в световоде с БВПП, а также его последующее сжатие (*в*). Параметры моделирования: $R = 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}$ Вт$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ (*1*–*3*), ширина линии усиления $\Delta\omega_{\rm lin} = 10^{12}$ с$^{-1}$, прочие параметры те же, что и на рис.1.

практически одинакова. При увеличении мощности импульсов (и росте нелинейных эффектов) волновой пакет в такой среде не сохраняется (кривые *3*). В отличие от предыдущего случая, из рис.4 следует, что при тех же значениях нелинейности R сильнее всего «страдает» часть спектра импульса вблизи несущей частоты, поэтому чирп нельзя считать линейным в этой области. Таким образом, можно считать, что методика усиления ЧМ импульсов в средах со значительно более узкой полосой линии усиления является хорошим инструментом для их качественной компрессии и усиления.

Резюмируя, отметим, что возможность расфокусировки усиливаемого и модулированного пучков может обеспечить бóльшую компрессию лазерного излучения (поскольку величина коэффициента нелинейности обратно пропорциональна эффективной площади пучка [15, 16]), при этом ширина линии усиления среды может быть значительно меньше ширины спектра импульса. Реализуемая БВПП стабилизирует усиливаемый ЧМ импульс, обеспечивая увеличение его энергии при сохранении формы.

4. Заключение

В работе предложена схема синхронизации волнового пакета типа МШГ, туннелирующего по поверхности световода, и продольно бегущей волны показателя преломления. Показано, что в активных цилиндрических световодах-модуляторах с БВПП можно обеспечить спектральное уширение и усиление широкополосных ЧМ импульсов с сохраняющейся формой и шириной линии $\Delta\omega > 10^{13}$ с$^{-1}$ включительно при использовании относительно узкополосных усилителей с шириной линии усиления не более $10^{11}-10^{12}$ с$^{-1}$. С помощью численного моделирования показано, что при использовании модуляторов с БВПП пиковая мощность усиливаемых импульсов может быть увеличена на несколько порядков.

Работа поддержана Министерством высшего образования и науки РФ в рамках госзадания № 0830-2020-0009, а также РФФИ (проекты № 18-29-1910, 19-42-730005, 19-42-730013).

Приложение

Пусть динамика рассматриваемого ВП описывается уравнением (4). Если рассогласование скоростей волнового пакета и БВПП принять малым (т.е. $\delta\tau \leqslant 10^{-11}$ с при $|\Omega|\tau_{\rm p} \ll 1$), то можно считать, что $\cos[\Omega(\tau-\delta\tau)] \approx 1-\Omega^2(\tau-\delta\tau)^2/2$.

Переходя в уравнении (4) к обозначениям $A(\xi)=\bar{A}(\xi)\times\exp(g_0\xi)$ и $R_1(\xi)=R\exp(2g_0\xi)$, а также полагая, что $d_3 \approx 0$, получаем

$$\frac{\partial\bar{A}}{\partial\xi}-\mathrm{i}\frac{d_2}{2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial\tau^2}+\mathrm{i}R_1(z)\left(\left|\bar{A}\right|^2-\tau_{\rm R}\frac{\partial\left|\bar{A}\right|^2}{\partial\tau}\right)\bar{A}$$
$$=\mathrm{i}m\beta\left(1-\frac{1}{2}\Omega^2(\tau-\delta\tau)^2\right)\bar{A}, \qquad (\text{П1})$$

или

$$\frac{\partial\bar{A}}{\partial\xi}-\mathrm{i}\frac{d_2}{2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial\tau^2}+\mathrm{i}R_1(\xi)\left(\left|\bar{A}\right|^2-\tau_{\rm R}\frac{\partial\left|\bar{A}\right|^2}{\partial\tau}\right)\bar{A}$$
$$=\mathrm{i}(S_0+S_1\tau+S_2\tau^2)\bar{A}, \qquad (\text{П2})$$

где $S_0=m\beta(1-\Omega^2\delta\tau^2/2)$; $S_1=m\beta\Omega^2\delta\tau$; $S_2=-m\beta\Omega^2/2$.

В рассматриваемом нами случае динамического волновода максимуму показателя преломления БВПП соответствует глубина модуляции $m<0$. Будем искать решение (П2) в виде

$$\bar{A}=a(\xi,\tau)\exp(\mathrm{i}\Phi(\xi))=a(\xi,\tau)\exp[\mathrm{i}(\phi_0(\xi)$$
$$+\phi_1(\xi)\tau+\alpha(\xi)\tau^2)], \qquad (\text{П3})$$

где $\Phi(\xi)=\phi_0(\xi)+\phi_1(\xi)\tau+\alpha(\xi)\tau^2$; $a(\xi,\tau)$ – фаза и амплитуда ВП соответственно. Подставляя (П3) в (П2), получаем разложение

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\left\{\frac{\partial a}{\partial\xi}+\mathrm{i}a\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\xi}+\tau\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}+\tau^2\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\right)-\mathrm{i}\frac{d_2}{2}\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^2 a}{\partial\tau^2}+2\mathrm{i}(\phi_1+2\alpha\tau)\frac{\partial a}{\partial\tau}+(2\mathrm{i}\alpha-\phi_1^2-4\tau^2\alpha^2-4\phi_1\alpha\tau)a\right]\right\}$$
$$+\mathrm{i}R_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\left(|a|^2-\tau_{\rm R}\frac{\partial|a|^2}{\partial\tau}\right)a=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}(S_0+S_1\tau+S_2\tau^2)a \qquad (\text{П4})$$

и, группируя слагаемые, получаем

$$\frac{\partial a}{\partial\xi}-\mathrm{i}\frac{d_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial\tau^2}+\mathrm{i}R_1\left(|a|^2-\tau_{\rm R}\frac{\partial|a|^2}{\partial\tau}\right)a$$
$$+\mathrm{i}\tau^2\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}+2d_2\alpha^2\right)a+\mathrm{i}\tau\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}+2d_2\phi_1\alpha\right)a$$
$$-\mathrm{i}\frac{d_2}{2}\left[2\mathrm{i}\phi_1\frac{\partial a}{\partial\tau}+(2\mathrm{i}\alpha-\phi_1^2)a\right]$$
$$+\mathrm{i}a\frac{\partial\phi_0}{\partial\xi}+2d_2\alpha\tau\frac{\partial a}{\partial\tau}=\mathrm{i}(S_0+S_1\tau+S_2\tau^2)a.$$

Уравнение (П4) должно иметь смысл при любых значениях времени, поэтому слагаемые, содержащие константы и временные сомножители τ, τ^2, должны в сумме давать нуль. Таким образом, получаем уравнения для фазовых параметров и амплитуды соответствующего волнового пакета. Первое уравнение:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}+2d_2\alpha^2=S_2=-\frac{1}{2}m\beta\,\Omega^2. \qquad (\text{П5})$$

При $d_2>0$ и $m<0$ реализуется волноводный режим – волна затягивается в область максимума показателя преломления БВПП, а решение для чирпа ВП имеет следующий вид:

$$\alpha(\xi)=\frac{\exp(2\sqrt{2S_2d_2}\,\xi)-1}{\exp(2\sqrt{2S_2d_2}\,\xi)+1}\sqrt{\frac{S_2}{2d_2}}. \qquad (\text{П6})$$

При эффективной длине, много меньшей дисперсионной длины, когда $\xi \ll \tau_0^2/|d_2|$, соотношение (П6) сводится к соотношению (6).

Для параметра фазы ϕ_1, определяющей линейное смещение частоты, получаем второе уравнение:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}+2\alpha d_2\phi_1=S_1. \qquad (\text{П7})$$

Третье уравнение получаем для параметра амплитуды a:

$$\frac{\partial a}{\partial \xi} + (d_2\phi_1 + 2d_2\alpha\tau)\frac{\partial a}{\partial \tau} - \mathrm{i}\frac{d_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + \mathrm{i}R_1\left(|a|^2 - \tau_\mathrm{R}\frac{\partial |a|^2}{\partial \tau}\right)a = F(\xi)a, \quad (\text{П8})$$

где

$$F(\xi) = \mathrm{i}\left[S_0 - \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} + \frac{d_2}{2}(2\mathrm{i}\alpha - \phi_1^2)\right] = \mathrm{i}\left(S_0 - \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} - \frac{d_2\phi_1^2}{2}\right) - d_2\alpha,$$

или, переходя к амплитуде

$$\bar{a} = a\exp\left(\int_0^\xi F(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right), \quad (\text{П9})$$

получаем

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \xi} + (\eta_1 + \eta_2\tau)\frac{\partial \bar{a}}{\partial \tau} - \mathrm{i}\,\frac{d_2}{2}\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \tau^2} + \mathrm{i}R_\mathrm{eff}\left(|\bar{a}|^2 - \tau_\mathrm{R}\frac{\partial |\bar{a}|^2}{\partial \tau}\right)\bar{a} = 0, \quad (\text{П10})$$

где $\eta_1(\xi) = d_2\phi_1$; $\eta_2(\xi) = 2d_2\alpha$. При этом эффективная нелинейность

$$R_\mathrm{eff}(\xi) = R_1(\xi)\exp\left(2\int_0^\xi \mathrm{Re}[F(\xi)]\mathrm{d}\xi\right) = R_1(\xi) \times \exp\left(-\int_0^\xi \eta_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right) = R(\xi)\exp\left(2g_0\xi - \int_0^\xi \eta_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right). \quad (\text{П11})$$

Поскольку в нашем случае с хорошей точностью можно считать, что $\delta\tau \to 0$ и, как следствие, $\phi_1 \to 0$, для $\bar{a}$ справедливо

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \xi} + 2\alpha d_2\frac{\partial \bar{a}}{\partial \tau} - \mathrm{i}\frac{d_2}{2}\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \tau^2} + \mathrm{i}R_\mathrm{eff}\left(|\bar{a}|^2 - \tau_\mathrm{R}\frac{\partial |\bar{a}|^2}{\partial \tau}\right)\bar{a} = 0. \quad (\text{П12})$$

Переходя в уравнении (П12) к новым координатам (длина и нормированное бегущее время),

$$\xi = \xi,\ \tau' = \exp\left(-\int_0^\xi \eta_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\tau, \quad (\text{П13})$$

получаем для $\bar{a}$ уравнение канонического вида (нелинейное уравнение Шрёдингера с параметром рамановского саморассеяния) [15]:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \xi} - \mathrm{i}\frac{d_2^\mathrm{eff}(\xi)}{2}\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \tau'^2} + \mathrm{i}R_\mathrm{eff} \times \left[|\bar{a}|^2 - \exp\left(-\int_0^\xi \eta_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\tau_\mathrm{R}\frac{\partial |\bar{a}|^2}{\partial \tau'}\right]\bar{a} = 0, \quad (\text{П14})$$

где

$$d_2^\mathrm{eff}(\xi) = \exp\left(-2\int_0^\xi \eta_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right)d_2.$$

Проведенный анализ позволяет оценить некоторые важные особенности динамики ЧМ импульсов в условиях взаимодействия с БВПП. Так, из соотношений (П5), (П6) и (П14) следует, что в среде с нормальной дисперсией, в приближении, когда можно считать, что

$$R_\mathrm{eff}(\xi)P_0/\tau_\mathrm{p}'^2(\xi) < |m|\beta\Omega^2, \quad (\text{П15})$$

где

$$\tau_\mathrm{p}'(\xi) = \tau_\mathrm{p}(\xi)\exp\left(\int_0^\xi \eta_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right)$$

– нормированная длительность импульса, импульс сохраняет свою форму, а его энергия, длительность, чирп и, как следствие, ширина спектра увеличиваются (см. (8)). При этом скорость частотной модуляции (с большой степенью точности) остается линейной.

Также видно, что, поскольку в нашем случае $\eta_2(\xi) = 2d_2\alpha > 0$, наличие БВПП уменьшает влияние эффективного значения нелинейности, что приводит к дополнительной стабилизации системы при росте энергии модулируемого волнового пакета; кроме того, нормированная длительность импульса в среде с керровской нелинейностью и нормальной дисперсией дополнительно увеличивается.

1. Торчигин В.П. *Квантовая электроника*, **20** (3), 276 (1993) [*Quantum Electron.*, **23** (3), 235 (1993)].
2. Торчигин В.П. *Квантовая электроника*, **22** (5), 509 (1995) [*Quantum Electron.*, **22** (5), 484 (1995)].
3. Булюк А.Н. *Квантовая электроника*, **19** (10), 1018 (1992) [*Quantum Electron.*, **19** (10), 948 (1992)].
4. Торчигин В.П. *Квантовая электроника*, **20** (3), 283 (1993) [*Quantum Electron.*, **20** (3), 235 (1993)].
5. Булюк А.Н. *Квантовая электроника*, **22** (1), 75 (1995) [*Quantum Electron.*, **22** (1), 66 (1995)].
6. Адамова М.С., Золотовский И.О., Семенцов Д.И. *Квантовая электроника*, **39** (3), 256 (2009) [*Quantum Electron.*, **39** (3), 256 (2009)].
7. Сычугов В.А., Магдич Л.Н., Торчигин В.П. *Квантовая электроника*, **31** (12), 1089 (2001) [*Quantum Electron.*, **31** (12), 1089 (2001)].
8. Zolotovskii I.O. et al. *J. Opt. Soc. Am. B*, **36** (10), 2877 (2019).
9. Золотовский И.О. и др. *Квантовая электроника*, **48** (9), 818 (2018) [*Quantum Electron.*, **48** (9), 818 (2018)].
10. Lord Rayleigh. *Phil. Mag.*, **20**, 1001 (1910).
11. Karakantzas G. et al. *Opt. Lett.*, **26**, 1137 (2001).
12. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов*. Пер. с англ. (М: Радио и связь, 1987).
13. Иванов О.В., Никитов С.А., Гуляев Ю.В. *УФН*, **176** (2), 175 (2006) [*Phys. Usp.*, **49**, 167 (2006)].
14. Сычугов В.А., Торчигин В.П., Цветков М.Ю. *Квантовая электроника*, **32** (8), 738 (2002) [*Quantum Electron.*, **32** (8), 738 (2002)].
15. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика*. Пер. с англ. (М.: Мир, 1996).
16. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (М.: Наука, 1988).
17. Szab G. et al. *Appl. Phys. B. Photophys. Laser Chem.*, **34** (3), 145 (1984).
18. Limpert J. et al. *Opt. Express*, **11** (7), 818 (2007).
19. Дианов Е.М. *УФН*, **174** (10), 1139 (2004) [*Phys. Usp.*, **47**, 1065 (2004)].
20. Курков А.С., Дианов Е.М. *Квантовая электроника*, **34** (10), 881 (2004) [*Quantum Electron.*, **34** (10), 881 (2004)].
21. Polland H.J. et.al. *Appl. Phys. B*, **32**, 53 (1983).
22. Bor Zs., Szatmari S., Muller A. *Appl. Phys. B. Photophys. Laser Chem.*, **32** (3), 101 (1983).
23. Abramov A.S. et al. *J.Opt. Soc. Am. B*, **37** (8), 2314 (2020).