Световое давление бесселева пучка на сферическую частицу: аналитическое решение

Д.В.Гузатов

Получены общие аналитические выражения для силы светового давления, действующей на сферическую частицу, расположенную в поле бесселева пучка. Показано, что притягивающая сила в пучке первого порядка может возникать для частиц с одновременно положительными или одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Установлено, что в случае внеосевого расположения частицы ее движение в поперечном сечении пучка может иметь вихревой вид. При этом частица может как смещаться к оси пучка, так и выталкиваться в сторону от нее.

Ключевые слова: *бесселев пучок, рассеяние света, давление света, притягивающая сила, сферическая частица, метаматериал с отрицательным преломлением.*

1. Введение

Исследование сил светового давления, создаваемых различными лазерными пучками, является важным и актуальным научным направлением, приведшим к разработке уникального прибора – оптического пинцета, который позволяет манипулировать микроорганизмами без их повреждения. В 2018 году за фундаментальные работы по оптическим пинцетам Артуру Эшкину была присуждена Нобелевская премия по физике [1].

В настоящей работе внимание уделено бесселеву пучку, который является решением векторного уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах [2]. Часто его называют бездифракционным, поскольку профиль интенсивности такого светового пучка сохраняется при распространении [3]. В частности, пучок способен восстанавливать исходный профиль после прохождения препятствий [4]. Бесселев пучок нулевого порядка впервые был получен в 1987 году при освещении круговой апертуры, расположенной в фокальной плоскости выпуклой линзы [5]. Сейчас бесселевы пучки разных порядков можно получать различными способами, например с помощью специальной конической линзы – аксикона [6–9]. При этом, если на линзу падает гауссов пучок, получается бесселев пучок с гауссовым профилем (так называемый гаусс-бесселев пучок). Кроме того, бесселевы пучки генерируются с помощью голограмм [10–12] и метаповерхностей [13–15].

Теоретически бесселевы пучки исследовались весьма активно, в частности были исследованы структура бесселевых пучков различных типов [2, 16], распространение бесселева пучка в бианизотропной среде [17], преломление и отражение пучка на границе раздела сред [18, 19], а также распространение пучка через многослойные структуры [20]. Кроме того, изучено рассеяние бесселевых пучков на сферических частицах различного материального состава [21–23], исследованы высокодобротные псевдомоды [24] и резонансы Фано [25], возникающие в диэлектрических сферах, расположенных в поле бесселева пучка нулевого порядка. Для бесселевых пучков было предсказано существование притягивающих частицы сил [26], что привело к появлению целого ряда работ на эту тему [27–37], в том числе и для случая акустического бесселева пучка [36, 37]. Экспериментальное подтверждение существования притягивающих сил представлено в [38, 39]. В целом, проблеме манипуляции и сортировки частиц с помощью сил светового давления, возникающих в бесселевых пучках, посвящены работы [38–47].

При исследовании рассеяния световых пучков на сферической частице и возникающих при этом сил светового давления помимо прямого численного моделирования часто используют обобщенную теорию Лоренца–Ми [48], в которой решения представляются в виде разложений по векторным сферическим гармоникам, а коэффициенты разложения определяются либо с помощью численного интегрирования, либо аналитически, если это возможно. Например, в работах [49–51] в рамках теории Лоренца–Ми разработан общий подход для нахождения сил светового давления в различных бесселевых пучках, действующих на сферические частицы. Приближенные аналитические выражения для сил светового давления в бесселевом пучке получены для сферических частиц большого [52, 53] и малого [28, 54, 55] размеров по сравнению с длиной волны. Простое и одновременно точное решение для рассеянных полей в виде разложения по сферическим волновым функциям для случая сферы произвольного радиуса найдено в [24, 25]. Полученные к настоящему времени аналитические решения для акустических бесселевых пучков представлены в [37, 56–62].

Цель нашей статьи – дополнить аналитические результаты работ [24, 25] и исследовать действие сил светового давления на сферические частицы из различных материалов, в том числе из метаматериала с отрицательным преломлением, расположенные в поле бесселева пучка. Для пучка произвольного порядка нами найдены выражения для рассеянных полей в виде разложения по векторным сферическим гармоникам при произвольном положении

Д.В.Гузатов. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Белоруссия, 230023 Гродно, ул. Ожешко, 22;
e-mail: guzatov@mail.ru

Поступила в редакцию 16 сентября 2022 г., после доработки – 20 октября 2022 г.

частицы относительно оси пучка. Полученные выражения применяются затем для вычисления силы светового давления с помощью тензора напряжений Максвелла.

В работе построена точная теория, позволяющая описывать взаимодействие векторных бесселевых световых пучков со сферическими частицами. Разработанные аналитические выражения и найденные подходы существенно дополняют имеющиеся в литературе теоретические результаты, особенно в части описания эффектов, связанных с векторным характером поля пучка. Кроме того, с помощью полученных выражений можно проанализировать и детально объяснить целый ряд эффектов, связанных с бесселевыми пучками, как это будет показано далее.

2. Рассеяние бесселева пучка на сферической частице

Для решения задачи о рассеянии бесселева пучка на сферической частице необходимо сначала поля пучка записать в сферической системе координат. Ниже будет приведен краткий вывод выражений для этих полей.

Электрическое и магнитное поля произвольного бесселева пучка, ось которого совпадает с осью z декартовой системы координат, могут быть представлены в виде суммы полей пучков ТМ и ТЕ типов [16, 18]. Для ТМ пучка z-проекции напряженностей электрического и магнитного полей имеют вид

$$E_z^{\mathrm{TM}} = E_0 \sin\gamma J_m(k_0\rho\sin\gamma)\exp(\mathrm{i}k_0 z\cos\gamma + \mathrm{i}m\varphi),\quad H_z^{\mathrm{TM}} = 0. \tag{1}$$

Для пучка ТЕ типа z-компоненты напряженностей записываются в следующем виде:

$$E_z^{\mathrm{TE}} = 0,\quad H_z^{\mathrm{TE}} = H_0 \sin\gamma J_m(k_0\rho\sin\gamma)\exp(\mathrm{i}k_0 z\cos\gamma + \mathrm{i}m\varphi). \tag{2}$$

В выражениях (1) и (2) E_0 и H_0 – амплитуды полей ТМ и ТЕ пучков соответственно; γ – угол полураствора конуса, который образует волновой вектор бесселева пучка с осью z [63]; $J_m(k_0\rho\sin\gamma)$ – функция Бесселя 1-го рода [64]; m – порядок (индекс) пучка; $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме; ω – частота; c – скорость света; $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $-\infty < z < \infty$ – цилиндрические координаты, которые связаны с декартовыми координатами соотношениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и $z = z$. Отметим, что при записи выражений (1) и (2), а также везде далее опущен множитель $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, определяющий зависимость полей от времени. Множитель $\exp(-\mathrm{i}k_0 z_0\cos\gamma)$, задающий центр пучка в точке $z = z_0$, является несущественным, поскольку бесселев пучок – бездифракционный.

Если рассматриваются бесселевы пучки, у которых z-проекции напряженностей электрического и магнитного полей в (1) и (2) пропорциональны $J_m(k_0\rho\sin\gamma)\exp(\mathrm{i}k_0 z\cos\gamma - \mathrm{i}m\varphi)$, т.е. для них $\varphi \to 2\pi - \varphi$, то выражения для таких пучков могут быть найдены из соотношений, полученных далее в работе, с помощью формальной замены [64]: $m \to -m$, $E_0 \to (-1)^m E_0$ и $H_0 \to (-1)^m H_0$.

Полные выражения для электрических и магнитных полей ТМ и ТЕ пучков могут быть записаны следующим образом [1, 16]:

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}} = E_0 \boldsymbol{X}_m,\quad \boldsymbol{H}^{\mathrm{TM}} = -\mathrm{i}E_0 \boldsymbol{Y}_m,\quad \boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}} = \mathrm{i}H_0 \boldsymbol{Y}_m,\quad \boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}} = H_0 \boldsymbol{X}_m, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{X}_m$ и $\boldsymbol{Y}_m$ – векторные цилиндрические гармоники [65, 66], определяемые соотношениями

$$\boldsymbol{X}_m = \frac{1}{k_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{Y}_m,\quad \boldsymbol{Y}_m = \frac{1}{k_0\sin\gamma}\mathrm{rot}[\boldsymbol{e}_z J_m(k_0\rho\sin\gamma)\exp(\mathrm{i}k_0 z\cos\gamma + \mathrm{i}m\varphi)], \tag{4}$$

где $\boldsymbol{e}_z$ – единичный вектор (орт), направленный вдоль оси z.

Для записи полей (3) в сферической системе координат воспользуемся выражением [65]

$$J_m(k_0\rho\sin\gamma)\exp(\mathrm{i}k_0 z\cos\gamma + \mathrm{i}m\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^{n-m}(2n+1) \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{\psi_n(k_0 r)}{k_0 r}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\gamma)\exp(\mathrm{i}m\varphi), \tag{5}$$

где $\psi_n(k_0 r) = \sqrt{\pi k_0 r/2}\,J_{n+1/2}(k_0 r)$; $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенная функция Лежандра [64]; $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ – сферические координаты, которые связаны с цилиндрическими соотношениями $\rho = r\sin\theta$, $\varphi = \varphi$ и $z = r\cos\theta$.

Подставим разложение (5) в (4) и проведем дифференцирование, при этом оператор rot запишем в сферических координатах и учтем, что $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta$, где $\boldsymbol{e}_r$ и $\boldsymbol{e}_\theta$ – орты, направленные вдоль соответствующих осей сферической системы координат. В результате найдем выражения для сферических компонент полей бесселева пучка. Данные выражения оказываются весьма громоздкими, однако их удается упростить с помощью соотношений для функций Бесселя и Лежандра [64, 65, 67]. В частности, для r-проекций напряженностей электрического и магнитного полей ТМ пучка можно получить выражения

$$E_r^{\mathrm{TM}} = E_0\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^{n-m+1}(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{\psi_n(k_0 r)}{(k_0 r)^2}P_n^m(\cos\theta)\tau_{mn},\quad H_r^{\mathrm{TM}} = E_0\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^{n-m+1}(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{\psi_n(k_0 r)}{(k_0 r)^2}P_n^m(\cos\theta)\pi_{mn}, \tag{6}$$

где

$$\tau_{mn} = \frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\gamma)}{\mathrm{d}\gamma};\quad \pi_{mn} = \frac{mP_n^m(\cos\gamma)}{\sin\gamma}. \tag{7}$$

Найденные соотношения для полей бесселева пучка ТМ и ТЕ типов (3) могут быть разложены в ряд по векторным сферическим гармоникам $\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}$ и $\boldsymbol{N}_{mn}^{(0)}$, имеющим вид

$$\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)} = \frac{1}{k_0}\mathrm{rot}[\boldsymbol{e}_r\psi_n(k_0 r)P_n^m(\cos\theta)\exp(\mathrm{i}m\varphi)],\quad \boldsymbol{N}_{mn}^{(0)} = \frac{1}{k_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}. \tag{8}$$

Сферические векторные гармоники образуют полную и ортогональную систему функций, их дивергенции рав-

ны нулю, а действие на гармоники оператора rot приводит к их взаимозамене: $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{N}_{mn}^{(0)} = k_0\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}$ (см. также (8)). Более детально о свойствах данных гармоник можно узнать в работах [65, 66].

Коэффициенты разложения для случая ТМ пучка находятся из сравнения выражений (6) с выражением для радиальной компоненты вектора $\boldsymbol{N}_{mn}^{(0)}$ (у вектора $\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}$ такая компонента отсутствует). Аналогичным образом можно найти и коэффициенты разложения для полей ТЕ пучка. В результате, для напряженностей полей произвольного бесселева пучка, являющегося суммой ТМ и ТЕ пучков, можно записать соотношения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{(0)} &= \boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}} = \sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{mn}^{(0)} + B_{mn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}), \\ \boldsymbol{H}^{(0)} &= \boldsymbol{H}^{\mathrm{TM}} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}} = -\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{mn}^{(0)} + A_{mn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} A_{mn}^{(0)} &= \mathrm{i}^{n-m+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}(E_0\tau_{mn} + \mathrm{i}H_0\pi_{mn}), \\ B_{mn}^{(0)} &= \mathrm{i}^{n-m+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}(E_0\pi_{mn} + \mathrm{i}H_0\tau_{mn}). \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что суммирование в (9) можно начинать с $n = |m|$, поскольку коэффициенты $A_{mn}^{(0)}$ и $B_{mn}^{(0)}$ равны нулю для $n < |m|$ в соответствии со свойствами функций Лежандра и факториала (гамма-функции) [64]. При $m = 0$ нижний индекс суммирования следует брать равным 1.

В частном случае $m = 0$ из (9) находятся выражения для сферических компонент напряженностей полей ТМ и ТЕ пучков, представленные в [24, 25]. Это подтверждает корректность полученных в настоящей работе аналитических результатов. Кроме того, прямое сравнение значений полей, задаваемых формулами (3) и (9), при различных параметрах бесселева пучка показывает их точное численное согласие.

Из сравнения выражений (3) с выражениями (9), например при $H_0 = 0$ и $E_0 \neq 0$, можно найти взаимосвязь векторных цилиндрических и векторных сферических гармоник, что может быть использовано при решении ряда задач дифракции (рассеяния) электромагнитных волн.

Выражения (9) получены для случая, когда ось пучка совпадает с осью z декартовой системы координат. Если ось пучка расположена параллельно оси z, выражения для полей (3) меняются и соответственно изменятся выражения (9). Рассмотрим декартову систему координат, ось z которой смещена в плоскости xy на расстояние l относительно оси пучка, а ее положение в плоскости задается полярным углом φ_0. Тогда векторные цилиндрические гармоники в смещенной системе координат можно представить в виде

$$\boldsymbol{X}_m = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_{mp}\tilde{\boldsymbol{X}}_p, \quad \boldsymbol{Y}_m = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_{mp}\tilde{\boldsymbol{Y}}_p, \tag{11}$$

где

$$Q_{mp} = J_{m-p}(k_0 l\sin\gamma)\exp[\mathrm{i}(m-p)\varphi_0], \tag{12}$$

а $\tilde{\boldsymbol{X}}_p$ и $\tilde{\boldsymbol{Y}}_p$ – векторные цилиндрические гармоники $\boldsymbol{X}_p$ и $\boldsymbol{Y}_p$ соответственно, записанные в смещенной системе при использовании локальных координат этой системы. Для нахождения соотношений (11) применялась теорема сложения для цилиндрических волновых функций $J_m(k_0\rho\sin\gamma)\exp(\mathrm{i}m\varphi)$, позволяющая волновые функции, записанные в одной системе координат, представить в виде разложения по волновым функциям, записанным в другой (смещенной) системе координат [68]. Данное разложение подставлялось в (4), где с помощью дифференцирования по локальным координатам смещенной системы были получены соотношения (11). В отсутствие смещения ($l = 0$) из (12) следует, что $Q_{mp} = J_{m-p}(0)\exp[\mathrm{i}(m-p)\varphi_0] = \delta_{mp}$, где δ_{mp} – дельта-символ Кронекера. Поэтому из (11) находим очевидные равенства: $\boldsymbol{X}_m = \tilde{\boldsymbol{X}}_m$ и $\boldsymbol{Y}_m = \tilde{\boldsymbol{Y}}_m$.

Пользуясь (11) и повторяя описанную выше процедуру, с помощью которой находились выражения (9), можно получить разложения для полей бесселева пучка произвольного типа со смещенной осью. Зная данные выражения, можно приступить к решению задачи рассеяния бесселева пучка на произвольно расположенной сферической частице.

Рассмотрим пучок, который падает на расположенную в вакууме сферическую частицу радиусом a, изготовленную из материала, определяемого диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ соответственно. Пусть частица находится в начале декартовой системы координат, при этом ось бесселева пучка смещена параллельно оси z. Тогда напряженности полей пучка можно представить в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n} Q_{mp}(A_{pn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{pn}^{(0)} + B_{pn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{pn}^{(0)}), \\ \boldsymbol{H}^{(0)} &= -\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n} Q_{mp}(B_{pn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{pn}^{(0)} + A_{pn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{pn}^{(0)}), \end{aligned} \tag{13}$$

где Q_{mp} определено формулой (12), в которой l – величина смещения оси пучка, а φ_0 – полярный угол в декартовой системе координат с началом на оси пучка, задающий центр сферической частицы. При записи (13) учтено, что коэффициенты $A_{pn}^{(0)}$ и $B_{pn}^{(0)}$ равны нулю при $|p| > n$, что привело к уменьшению числа суммируемых по p членов.

В соответствии с методом решения задачи рассеяния излучения на сфере [65, 66] отраженные от частицы поля следует задавать в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n} Q_{mp}(a_n A_{pn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{pn}^{(1)} + b_n B_{pn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{pn}^{(1)}), \\ \boldsymbol{H}^{(1)} &= -\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n} Q_{mp}(b_n B_{pn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{pn}^{(1)} + a_n A_{pn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{pn}^{(1)}), \end{aligned} \tag{14}$$

где a_n и b_n – коэффициенты разложения, подлежащие определению; $\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}$ и $\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}$ – векторные сферические гармоники, которые получаются из гармоник $\boldsymbol{N}_{mn}^{(0)}$ и $\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}$ соответственно путем замены функций $\psi_n(k_0 r)$ функциями $\zeta_n(k_0 r) = \sqrt{\pi k_0 r/2}\,H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 r)$; $H_{n+1/2}^{(1)}(k_0 r)$ – функция Ханкеля 1-го рода [64].

Поля, прошедшие внутрь частицы, нужно искать в виде

$$\boldsymbol{E}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n} Q_{mp}(c_n A_{pn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{pn}^{(2)} + d_n B_{pn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{pn}^{(2)}),$$

$$\boldsymbol{H}^{(2)} = -\frac{\mathrm{i}}{k_0\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{E}^{(2)} \tag{15}$$

$$= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n} Q_{mp}(d_n B_{pn}^{(0)}\boldsymbol{N}_{pn}^{(2)} + c_n A_{pn}^{(0)}\boldsymbol{M}_{pn}^{(2)}),$$

где c_n и d_n – коэффициенты, подлежащие определению; $\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}$ и $\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}$ – векторные сферические гармоники, которые получаются соответственно из гармоник $\boldsymbol{N}_{mn}^{(0)}$ и $\boldsymbol{M}_{mn}^{(0)}$ с помощью замены $k_0 \to k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов в (14) и (15) воспользуемся граничными условиями непрерывности тангенциальных компонент электрических и магнитных полей на поверхности сферической частицы ($r = a$). Коэффициенты c_n и d_n в дальнейших вычислениях не понадобятся, а для коэффициентов a_n и b_n можно получить следующие выражения, которые совпадают с известными выражениями для коэффициентов Ми [65, 66]:

$$a_n = -\left[\frac{\psi_n(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\psi_n'(k_0 a) - \sqrt{\mu/\varepsilon}\,\psi_n'(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\psi_n(k_0 a)}{\psi_n(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\zeta_n'(k_0 a) - \sqrt{\mu/\varepsilon}\,\psi_n'(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\zeta_n(k_0 a)}\right],$$

$$b_n = -\left[\frac{\psi_n(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\psi_n'(k_0 a) - \sqrt{\varepsilon/\mu}\,\psi_n'(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\psi_n(k_0 a)}{\psi_n(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\zeta_n'(k_0 a) - \sqrt{\varepsilon/\mu}\,\psi_n'(k_0 a\sqrt{\varepsilon\mu})\zeta_n(k_0 a)}\right], \tag{16}$$

где штрих обозначает производную функции.

3. Сила светового давления, действующая на сферическую частицу, находящуюся в поле бесселева пучка

Для того чтобы найти световое давление на сферическую частицу, расположенную в электромагнитном поле бесселева пучка, воспользуемся формализмом, связанным с тензором напряжений Максвелла $\hat{T}$ [65, 66]. В рамках этого подхода выражение для усредненной по времени силы светового давления $\boldsymbol{F}$, действующей на частицу, имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\int_S \mathrm{Re}(\boldsymbol{n}\hat{T})\,\mathrm{d}S,$$

$$\hat{T} = \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}^{\mathrm{out}}\otimes\boldsymbol{E}^{\mathrm{out}*} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{E}^{\mathrm{out}}|^2\hat{I}\right) \tag{17}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{out}}\otimes\boldsymbol{H}^{\mathrm{out}*} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}^{\mathrm{out}}|^2\hat{I}\right),$$

где S – произвольная поверхность, охватывающая рассматриваемую частицу; $\boldsymbol{n}$ – вектор внешней нормали к этой поверхности; $\boldsymbol{E}^{\mathrm{out}} = \boldsymbol{E}^{(0)} + \boldsymbol{E}^{(1)}$ и $\boldsymbol{H}^{\mathrm{out}} = \boldsymbol{H}^{(0)} + \boldsymbol{H}^{(1)}$ – полные электрическое и магнитное поля в области вне частицы соответственно; $\otimes$ – прямое произведение векторов; $\hat{I}$ – единичный тензор; звездочка – комплексное сопряжение.

Для вычисления интеграла в (17) поверхность S удобно взять в виде сферы радиусом $r \to \infty$ с центром в начале системы координат. При этом следует учесть, что радиальные составляющие векторных сферических гармоник на больших расстояниях затухают быстрее, чем $1/r$, так что вклад в интегралы будут давать только θ- и φ-компоненты полей. В результате (17) можно преобразовать к более простому интегралу:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta$$

$$\times\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\left(|E_\theta^{\mathrm{out}}|^2 + |E_\varphi^{\mathrm{out}}|^2 + |H_\theta^{\mathrm{out}}|^2 + |H_\varphi^{\mathrm{out}}|^2\right)\boldsymbol{e}_r r^2\Big|_{r\to\infty}. \tag{18}$$

Явные выражения для декартовых проекций силы F_x, F_y и F_z, получающихся после интегрирования в (18), из-за громоздкости представлены в Приложении. Отметим, что в случае частицы, расположенной на оси бесселева пучка ($l = 0$), отлична от нуля лишь компонента F_z, а компоненты F_x и F_y равны нулю. Выражение для F_z при $l = 0$ также дано в Приложении.

Для частицы, размер которой значительно меньше длины волны (случай наночастицы), выражение для силы светового давления может быть разложено в ряд при $k_0 a \to 0$. Ограничиваясь первым членом разложения в ряд компоненты F_z, для частицы на оси пучка при $m = 0$ можно получить приближенное выражение

$$F_z \approx \frac{1}{2}k_0 a^3\left[|E_0|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)\right.$$

$$\left.+|H_0|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\right]\sin^2\gamma\cos\gamma, \tag{19}$$

а при $m = 1$ – выражение

$$F_z \approx \frac{1}{4}k_0 a^3\cos\gamma\left[|E_0\cos\gamma + \mathrm{i}H_0|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)\right.$$

$$\left.+|E_0 + \mathrm{i}H_0\cos\gamma|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\right]. \tag{20}$$

С другой стороны, силу светового давления на наночастицу можно рассчитать при использовании дипольного приближения. В рассматриваемом случае ($F_z \propto k_0 a^3$) можно записать выражение [28]

$$F_z \approx \frac{1}{2}k_0 a^3\cos\gamma$$

$$\times\left[|\boldsymbol{E}^{(0)}|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) + |\boldsymbol{H}^{(0)}|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\right]. \tag{21}$$

Подставляя в (21) выражения для $\boldsymbol{E}^{(0)} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{TM}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{TE}}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{TM}} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{TE}}$ из (3), для $\rho = 0$ получаем формулы (19) и (20). Это подтверждает корректность найденных в настоящей работе выражений.

Приближенные выражения для силы светового давления при произвольных положениях наночастицы относительно бесселева пучка, произвольном порядке пучка m и с любой точностью могут быть найдены с помощью разложения в ряд при $k_0 a \to 0$ общих выражений из

Приложения. Например, в частном случае $m = 0$ для частицы, расположенной на оси пучка, громоздкое выражение для силы F_z, полученное с более высокой, чем в (19), точностью, представлено в Приложении. Из данного выражения следует, что для непоглощающих частиц ($\mathrm{Im}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\mu = 0$) вклад в силу светового давления дают слагаемые, начиная с членов порядка $k_0^4 a^6$.

Если частица расположена в прозрачной (непоглощающей) среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_m и μ_m соответственно, выражения для силы светового давления следует обобщить с помощью следующих замен [65, 69]: $k_0 \to k_0\sqrt{\varepsilon_\mathrm{m}\mu_\mathrm{m}}$, $\varepsilon \to \varepsilon/\varepsilon_\mathrm{m}$, $\mu \to \mu/\mu_\mathrm{m}$, $H_0 \to H_0\sqrt{\mu_\mathrm{m}/\varepsilon_\mathrm{m}}$ и $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}/\varepsilon_\mathrm{m}$. При этом амплитуды E_0 и H_0 падающих полей (1) и (2) остаются без изменений.

4. Иллюстрации полученных результатов и их обсуждение

Для иллюстрации найденных в работе аналитических выражений для силы светового давления ограничимся рассмотрением бесселева пучка с индексом $m = 1$, поскольку именно в этом случае возникает эффект притягивающей силы [26], т. е. выполняется условие $F_z < 0$. Исследования сил светового давления, обусловленных пучками других порядков, могут быть выполнены аналогично с помощью полученных в работе выражений.

Далее для удобства будет рассмотрена нормированная сила светового давления $\boldsymbol{\sigma}$, декартовы проекции которой находятся следующим образом: $\sigma_j = F_j/F_0$, где $j = x, y, z$ и $F_0 = a^2(|E_0|^2 + |H_0|^2)/16$. Кроме того, в расчетах амплитуда H_0 полагается равной 1, если это дополнительно не оговорено. В расчетах, выполненных для частиц из метаматериала с $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$, применялось правило $\sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu}$, что обеспечивает отрицательность показателя преломления для этого случая.

На рис.1 показаны зависимости z-компоненты нормированной силы светового давления σ_z как функции диэлектрической проницаемости для сферических частиц из магнитного диэлектрика ($\mu = 3$, $\varepsilon > 0$, рис.1,*а*) и из метаматериала с отрицательным преломлением ($\mu = -3$, $\varepsilon < 0$, рис.1,*б*) при различных амплитудах E_0 пучка. Частица расположена на оси пучка ($l = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$).

Как следует из рис.1, при определенных значениях диэлектрической проницаемости сила $\sigma_z < 0$. Из рис.1,*а* видно, что для рассматриваемых μ и E_0 в исследуемом диапазоне ε наименьшие значения силы возникают при $E_0 = \mathrm{i}$, а при $E_0 = 0$ (TE пучок) отрицательных значений силы не наблюдается. Тем не менее более детальный анализ показывает, что и для TE пучка сила σ_z может быть меньше нуля в случае $\varepsilon, \mu > 0$, однако отрицательные значения силы будут относительно невелики. Кроме того, из рис.1,*а* видно, что при некоторых значениях диэлектрической проницаемости появляются резонансы, в условиях которых сила светового давления значительно возрастает. При достаточно больших ε резонансные пики характеризуются высокой добротностью. Анализ результатов показывает, что данные резонансы возникают при возбуждении различных TM и TE мод в частице, когда знаменатели коэффициентов Ми (16) обращаются в нуль. Отметим, что приведенные на рис.1,*а* зависимости хорошо согласуются с аналогичными зависимостями из работы [26] для F_z, полученными численно, а это снова подтверждает корректность найденных аналитических выражений и выполненных в настоящей работе расчетов.

В случае частицы со свойством отрицательного преломления (рис.1,*б*) тоже возникают области значений диэлектрической проницаемости, для которых $\sigma_z < 0$. Видно, что такие значения имеют место для полей пучков со всеми рассмотренными амплитудами E_0. Интересно отметить, что высокодобротные пики для частицы с $\varepsilon, \mu < 0$ появляются при относительно небольших абсолютных значениях диэлектрической проницаемости по сравнению со случаем частицы с положительными ε и μ (ср. рис.1,*а* и *б*). Это обусловлено возбуждением в частице из метаматериала с отрицательным преломлением высокодобротных поверхностных мод, появляющихся наряду с обычными модами [70].

Важно отметить, что для эффективной манипуляции частицами с помощью сил светового давления, создаваемых бесселевыми пучками, следует применять источники излучения с достаточно высокой мощностью. В частности, в работах [38, 39], где экспериментально был реализован эффект притягивающей силы для расположенных в воде полистироловых частиц диаметром 820 нм, использовался пучок с оптической плотностью ~1.8 мВт/мкм^2, которая достигалась на длине волны 532 нм с помощью лазера, имеющего в области расположения частиц мощность ~3.2–3.5 Вт.

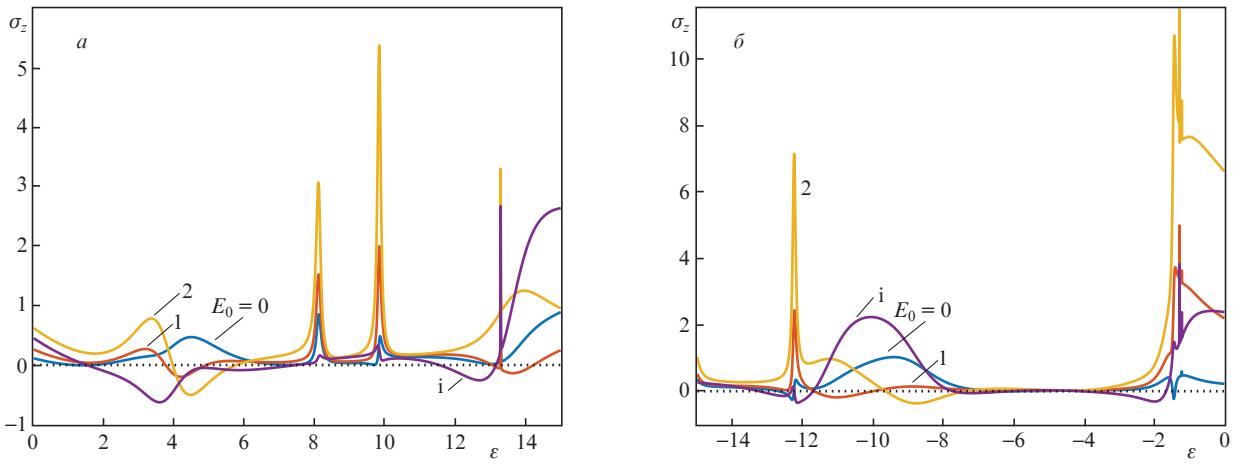

Рис.1. Зависимости σ_z от диэлектрической проницаемости для сферических частиц на оси бесселева пучка с $\sin\gamma = 0.9$, изготовленных из материала с $\mu = 3$, $\varepsilon > 0$ (*а*) и из метаматериала с $\mu = -3$, $\varepsilon < 0$ (*б*), при различных амплитудах пучка E_0. Размер частицы $k_0 a = 1$. Пунктирная линия соответствует $\sigma_z = 0$.

На рис.2 показаны распределения силы σ_z в зависимости от диэлектрической и магнитной проницаемостей для бесселевых пучков с амплитудами $E_0 = 1$ (рис.2,*а*,*б*) и $E_0 = \mathrm{i}$ (рис.2,*в*,*г*) для частиц с размерами $k_0a = 0.5$ и 1.5, расположенных на оси пучка. Видно, что отрицательные значения силы светового давления преимущественно возникают для частиц с одновременно положительными или одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями, что согласуется с результатами работ [26, 27]. При $\varepsilon < 0$, $\mu > 0$ и $\varepsilon > 0$, $\mu < 0$ отрицательные значения σ_z могут быть относительно небольшими, и в этих случаях сила светового давления в основном перемещает частицу вперед.

Из рис.2 также видно, что при увеличении радиуса сферической частицы число областей распределения с максимумами и минимумами σ_z возрастает, что связано с усложнением интерференционной картины, обусловленной ростом числа мод, возбуждаемых в частице. Отметим также, что для пучка с $E_0 = \mathrm{i}$ и $H_0 = 1$ (рис.2,*в*,*г*) отрицательные значения σ_z возникают при $\varepsilon \approx \mu$, а для пучка с $E_0 = H_0 = 1$ (рис.2,*а*,*б*) в этом случае $\sigma_z > 0$ (см. также рис.1).

До сих пор анализировался случай частицы, расположенной на оси бесселева пучка, когда $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Далее будет рассмотрена сила светового давления, возникающая при произвольном положении частицы в перпендикулярной к оси пучка плоскости $z = 0$. На рис.3 показаны декартовы проекции нормированной силы светового давления $\boldsymbol{\sigma}$ для пучков с $E_0 = 1$ и i как функции положения частицы размером $k_0a = 1$ относительно оси пучка. Распределения построены в локальных координатах $x_0 = l\cos\varphi_0$ и $y_0 = l\sin\varphi_0$, задающих положение центра сферической частицы относительно оси пучка. Параметры на рис.3 и на рис.4 и 6 (см. далее) соответствуют случаям, когда при расположении частицы на оси z сила $\sigma_z < 0$.

Как следует из рис.3,*а*–*г*, распределения для поперечных проекций силы светового давления могут иметь достаточно сложный вид. Это особенно заметно в случае пучка с амплитудой $E_0 = \mathrm{i}$, когда компоненты σ_x и σ_y образуют своеобразные вихри (рис.3,*б*,*г*). Для z-проекции силы имеет место симметричная кольцевая структура распределения с областями минимумов и максимумов (рис.3,*д*,*е*).

Сложные свойства поперечных сил могут вызывать движение частицы в сечении бесселева пучка по круговым и спиральным траекториям, что следует из рис.4, где построены векторные поля силы светового давления, действующей в поперечном сечении пучка. Видно, что

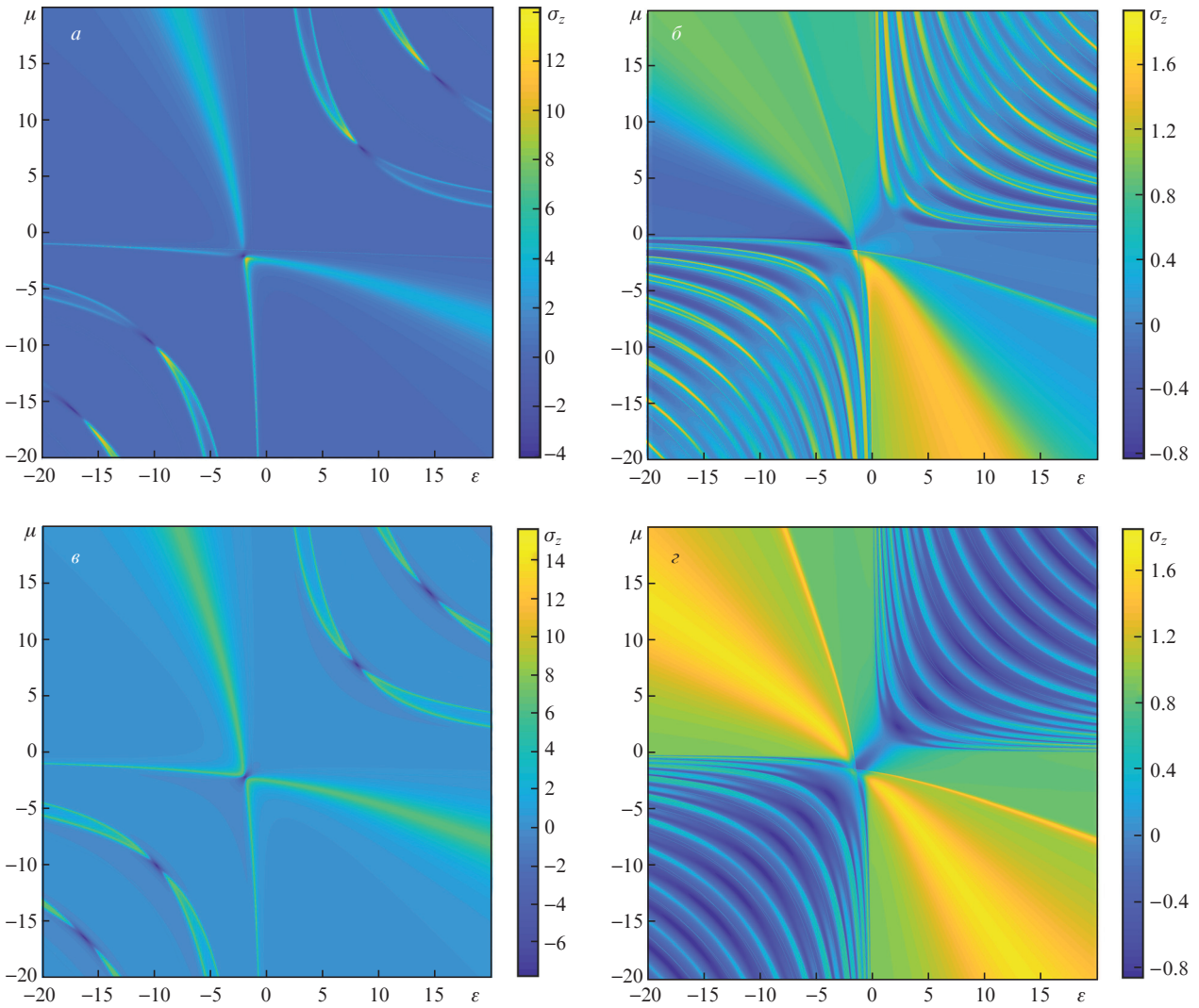

Рис.2. Зависимости σ_z от диэлектрической и магнитной проницаемостей сферических частиц, расположенных на оси бесселева пучка ($\sin\gamma = 0.95$), при $k_0a = 0.5$, $E_0 = 1$ (*а*), $k_0a = 1.5$, $E_0 = 1$ (*б*), $k_0a = 0.5$, $E_0 = \mathrm{i}$ (*в*) и $k_0a = 1.5$, $E_0 = \mathrm{i}$ (*г*).

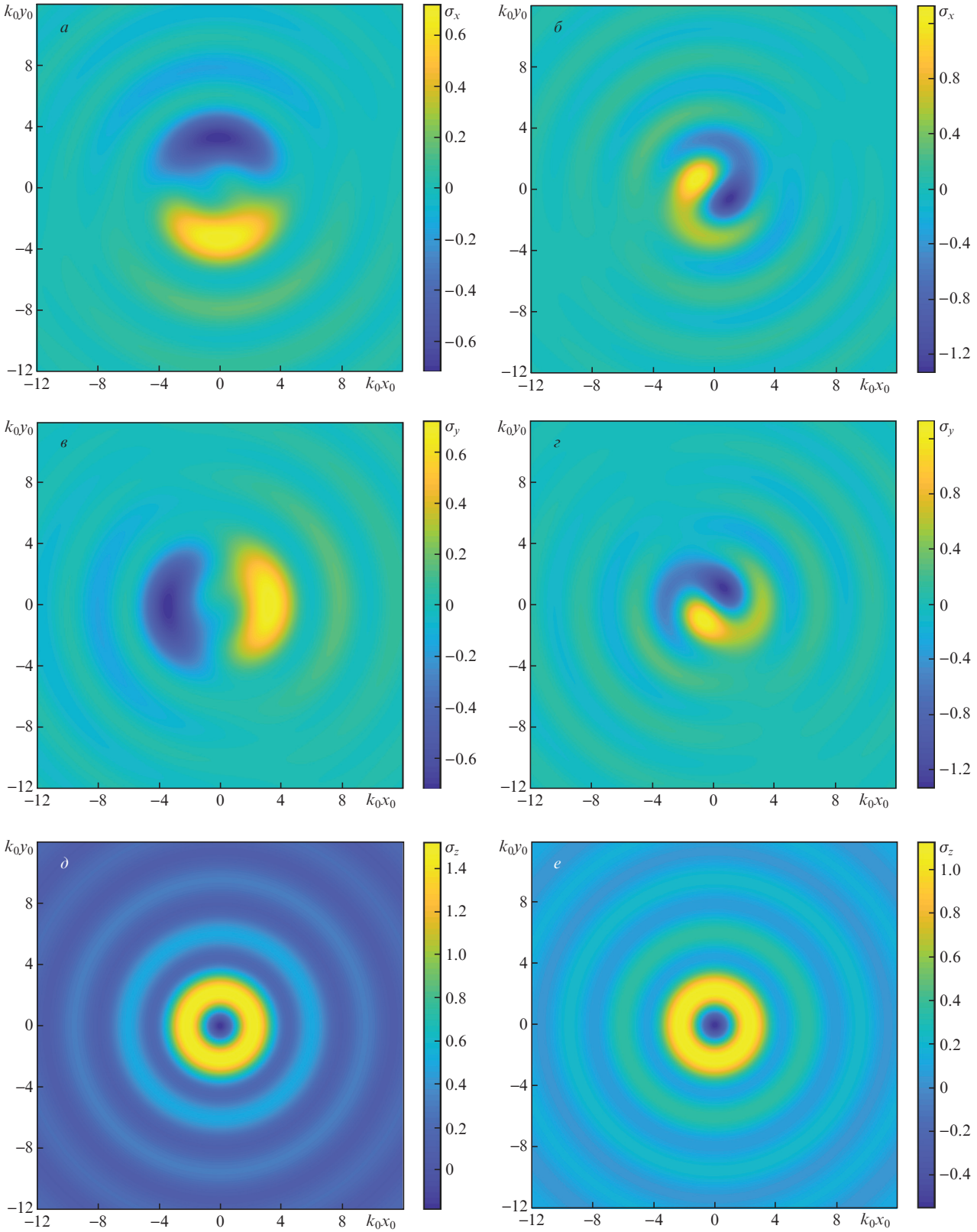

Рис.3. Распределения компонент $\boldsymbol{\sigma}$ в плоскости $z = 0$ в зависимости от положения сферической частицы размером $k_0a = 1$ относительно оси бесселева пучка с $\sin\gamma = 0.9$: σ_x (*а*), σ_y (*в*), σ_z (*д*) при $\varepsilon = 4.1$, $\mu = 3$, $E_0 = 1$ и σ_x (*б*), σ_y (*г*), σ_z (*е*) при $\varepsilon = 3.3$, $\mu = 3$, $E_0 = \mathrm{i}$.

эффект вихревого движения возможен и для частицы с $\varepsilon, \mu > 0$, и для частицы с $\varepsilon, \mu < 0$. При этом частица может смещаться к центру пучка (рис.4,*а*,*б* для $E_0 = \mathrm{i}$), что способствует стабилизации ее положения на оси пучка, и выталкиваться на его периферию (рис.4,*в*,*г* для $E_0 = 2$). С учетом того, что при смещении от центра пучка σ_z меняет как свою величину, так и знак (см. рис.3,*д*,*е*), это приводит к сложному движению частицы и в направлении оси пучка.

Характер действия поперечных сил светового давления несомненно зависит от свойств бесселева пучка, действующего на частицу. На рис.5 показаны распределения абсолютного значения и фазы проекции напряженности

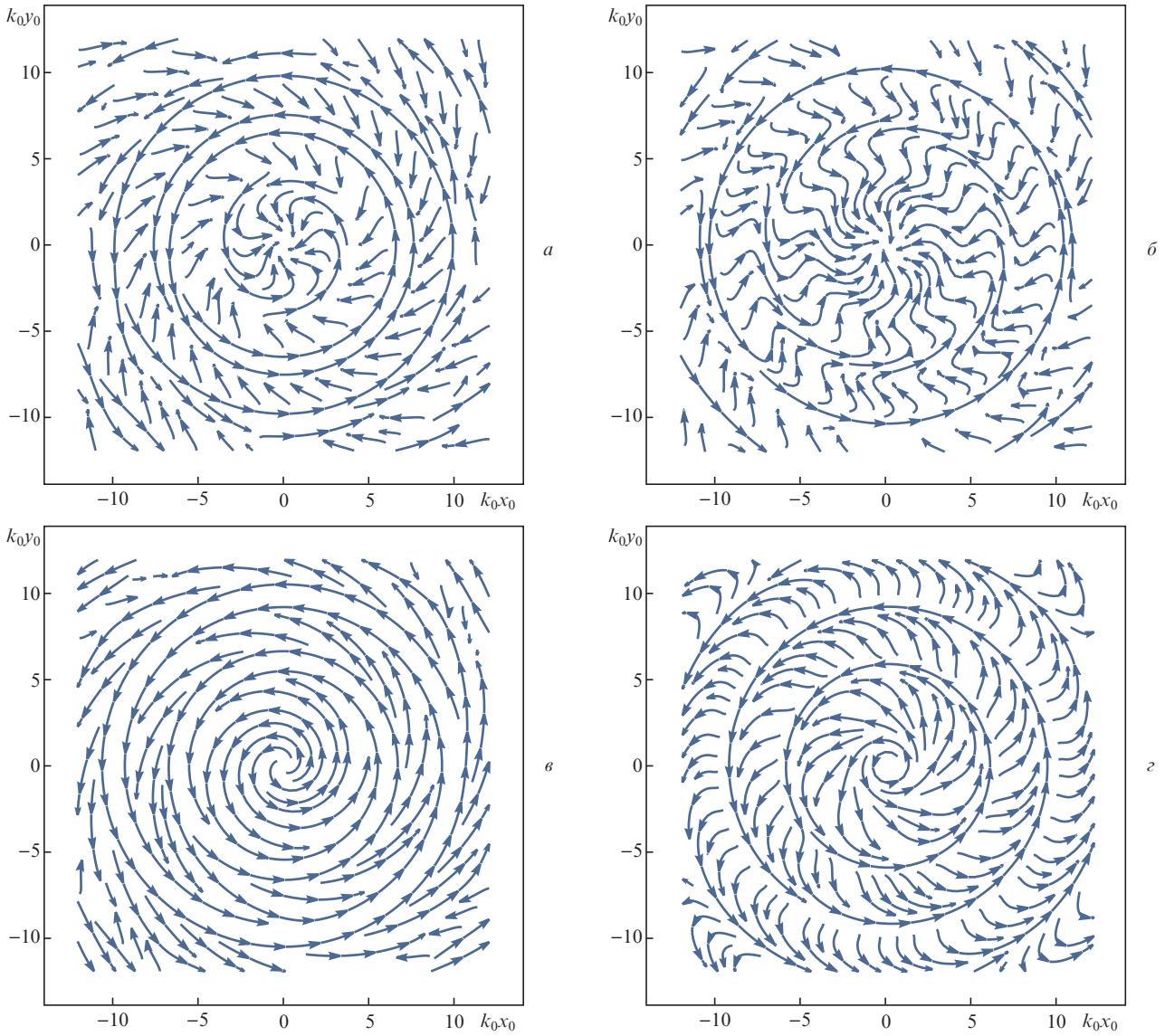

Рис.4. Векторные поля силы светового давления, действующей на сферическую частицу размером $k_0a = 1$, расположенную в поперечном сечении ($z = 0$) бесселева пучка с $\sin\gamma = 0.9$, при $\varepsilon = 3.3$, $\mu = 3$, $E_0 = \mathrm{i}$ (*а*), $\varepsilon = -1.9$, $\mu = -3$, $E_0 = \mathrm{i}$ (*б*), $\varepsilon = 4.1$, $\mu = 3$, $E_0 = 2$ (*в*) и $\varepsilon = -8.6$, $\mu = -3$, $E_0 = 2$ (*г*).

падающего электрического поля $E_\varphi^{(0)}$ при совпадении оси пучка с декартовой осью z (т.е. при $l = 0$) для бесселевых пучков (см. рис.4).

Как следует из сравнения рис.4 и 5, имеется заметная корреляция между минимальными значениями модуля напряженности поля $E_\varphi^{(0)}$ и кольцевым движением частицы, а также между сложным изменением фазы $E_\varphi^{(0)}$ и сложным характером действия силы светового давления, что особенно хорошо видно для пучка с амплитудой поля $E_0 = 2$ (ср. рис.4,*в*,*г* и рис.5,*в*,*г*), когда возникает сложная спиралевидная зависимость фазы. Для бесселевых пучков других типов распределения модулей полей и фаз могут быть рассмотрены аналогично.

Следует отметить, что бесселевы пучки относятся к спиральным пучкам [71], обладают нетривиальными пространственной и фазовой структурами, а также несут орбитальный момент. Проблеме формирования оптических вихревых пучков с теми или иными свойствами в различных условиях посвящен обзор [72].

Отметим также, что проведенные независимые вычисления для оптического [29, 31] и акустического [59] бесселевых пучков тоже указывают на вихревой характер действия поперечных сил в пучке, что подтверждает корректность выполненных в настоящей работе расчетов. В целом, эффект вращательного движения частиц с помощью сил светового давления в различных световых пучках достаточно хорошо известен [40, 41, 73]. Детальное исследование движения частицы под действием сил светового давления в бесселевом пучке будет представлено в отдельной публикации.

Как было отмечено выше, при $E_0 = 0$ отрицательные значения силы светового давления относительно невелики для частицы с диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon, \mu > 0$, расположенной на оси пучка. Однако для сферической частицы из метаматериала с отрицательным преломлением можно найти такие значения проницаемостей, при которых отрицательные величины силы как для ТЕ, так и для ТМ пучка уже не являются малыми. Насколько известно автору, данный результат ранее не был представлен в литературе. В частности, для частицы размером $k_0a = 1$ в случае падения на нее ТЕ пучка сила σ_z принимает существенные отрицательные значения при

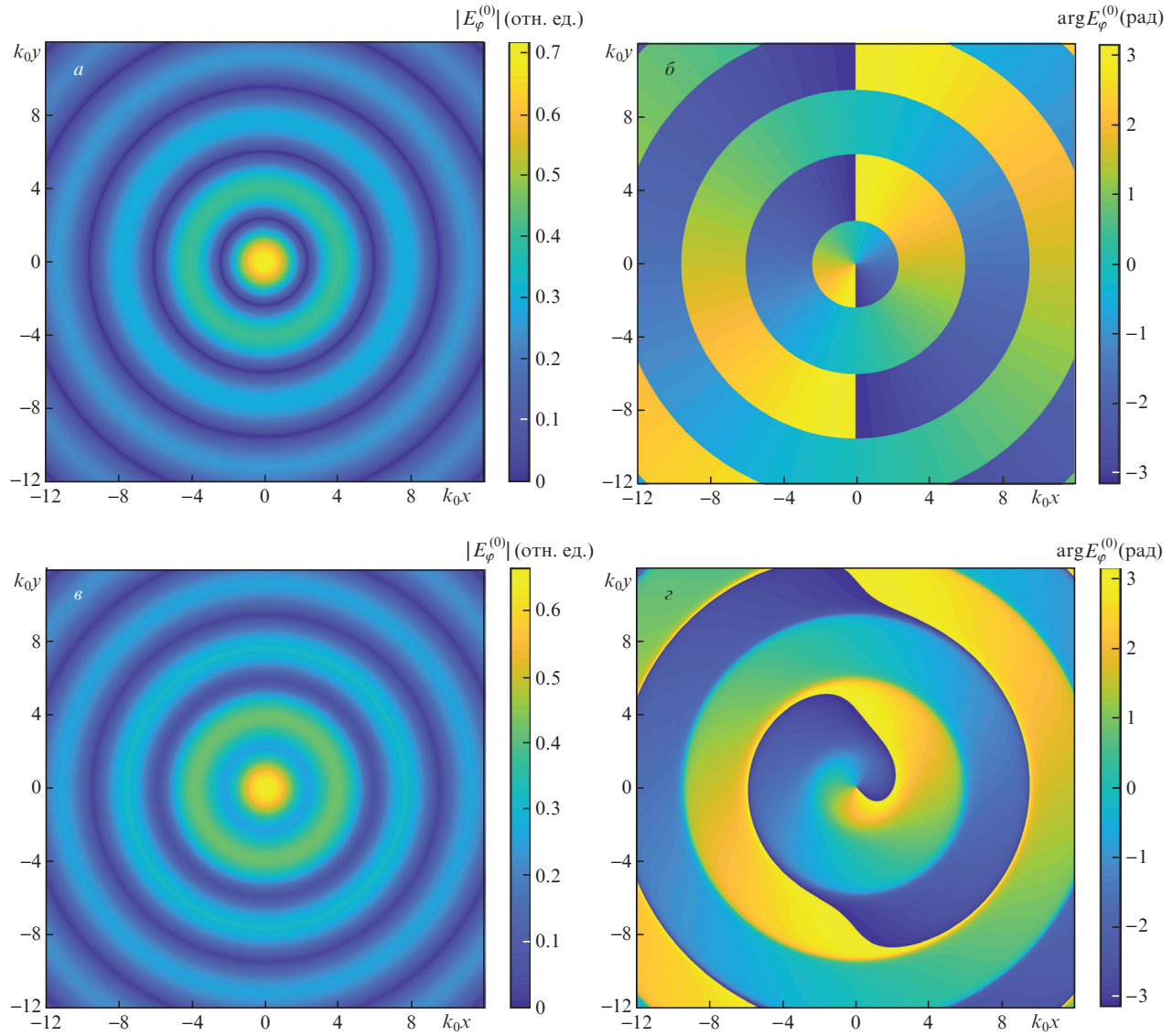

Рис.5. Распределения абсолютного значения (*а*, *в*) и фазы (*б*, *г*) напряженности поля $E_\varphi^{(0)}$ (при $l = 0$) в поперечном сечении бесселева пучка с $\sin\gamma = 0.9$ и амплитудой поля $E_0 = \mathrm{i}$ (*а*, *б*) и 2 (*в*, *г*).

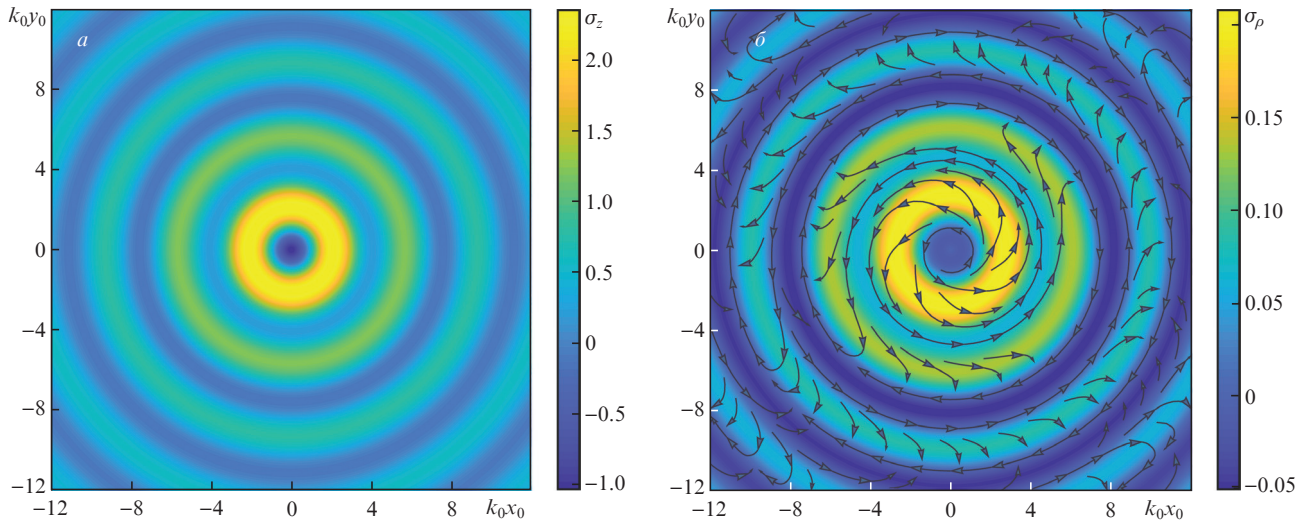

Рис.6. Компоненты σ_z (*а*) и σ_ρ (*б*) как функции положения сферической частицы со свойством отрицательного преломления в плоскости $z = 0$ вблизи оси бесселева ТМ пучка при $\varepsilon = -1.974$, $\mu = -1.546$ или ТЕ пучка при $\varepsilon = -1.546$, $\mu = -1.974$. Угол полураствора пучка $\gamma = \arcsin 0.9$. Размер частицы $k_0a = 1$. На рис.6,*б* представлено векторное поле силы светового давления, действующей на частицу в поперечном сечении пучка.

$\varepsilon = -1.546$ и $\mu = -1.974$, а в случае падения на частицу ТМ пучка такие значения получаются при $\varepsilon = -1.974$ и $\mu = -1.546$, т.е. при взаимозамене значений диэлектрической и магнитной проницаемостей. На рис.6 показаны распределения z-проекции нормированной силы σ_z (рис.6,*а*) и ρ-проекции силы $\sigma_\rho = \sigma_x\cos\varphi_0 + \sigma_y\sin\varphi_0$ (рис.6,*б*) в зависимости от положения частицы в поперечном сечении ТМ или ТЕ пучка. Отметим, что найденные распределения для ТМ и ТЕ пучков совпадают из-за свойств симметрии уравнений Максвелла [69], позволяющей поля одного типа (например, ТЕ) получить из полей другого типа (ТМ) с помощью формальных замен: $E_0 \to H_0$, $H_0 \to -E_0$ и $\varepsilon \leftrightarrow \mu$. В данном случае, поскольку электрическое и магнитное поля входят в (18) одинаковым образом (в виде квадратов модулей), это приводит к идентичным рисункам для ТМ и ТЕ пучков.

Как следует из рис.6, при указанных значениях проницаемостей и расположении частицы вблизи оси бесселева пучка возникает притягивающая сила. При этом поведение частицы вблизи оси пучка определяется сложным характером поперечных составляющих силы светового давления (см. векторное поле силы, представленное на рис.6,*б*).

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе получены и исследованы общие аналитические выражения для силы светового давления, действующей на сферическую частицу произвольного размера и материального состава, расположенную в поле бесселева пучка в произвольном месте по отношению к его оси. Основное внимание уделено пучку порядка $m = 1$, поскольку в этом случае может возникать притягивающая частицу сила.

Показано, что эффект притягивающей силы имеет место преимущественно для частиц из материалов с одновременно положительными или одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Установлено, что на частицу, расположенную в перпендикулярной к оси пучка плоскости и находящуюся не на оси, могут действовать поперечные силы светового давления, которые приводят к сложному вихревому (спиральному и круговому) движению частицы. Тот или иной характер действия поперечных сил связан со свойствами полей бесселева пучка. В зависимости от характеристик пучка частица может как смещаться к оси пучка, что стабилизирует ее положение на оси, так и выталкиваться на периферию пучка. Показано, что существенные значения притягивающей силы в бесселевых пучках ТМ и ТЕ типов могут возникать для частицы из метаматериала с отрицательным преломлением при ее расположении на оси пучка.

В случае наночастицы, расположенной на оси бесселева пучка нулевого порядка, найдено приближенное выражение для силы светового давления в виде разложения по малому отношению размера частицы к длине волны вплоть до членов шестого порядка включительно.

Полученные в настоящей работе результаты могут использоваться при исследовании рассеяния полей бесселева пучка на сферической частице, при анализе силы светового давления, действующей на частицу, расположенную в поле пучка, при разработке лазерных пинцетов, а также для интерпретации результатов экспериментов по манипулированию микрочастицами с помощью сил светового давления, создаваемых бесселевыми пучками.

Приложение

Явные выражения для декартовых проекций силы светового давления F_x и F_y имеют вид

$$F_x = \mathrm{Re}\,G, \quad F_y = \mathrm{Im}\,G, \tag{П1}$$

где

$$\begin{aligned}
G = &-\frac{\mathrm{i}}{4k_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\frac{(n-p)!}{(n+p)!}Q_{mp}Q_{m,p+1}^{*}\\
&\times[(E_0\tau_{pn}+\mathrm{i}H_0\pi_{pn})(E_0^{*}\pi_{p+1,n}-\mathrm{i}H_0^{*}\tau_{p+1,n})(a_n+b_n^{*}+2a_nb_n^{*})\\
&+(E_0\pi_{pn}+\mathrm{i}H_0\tau_{pn})(E_0^{*}\tau_{p+1,n}-\mathrm{i}H_0^{*}\pi_{p+1,n})(b_n+a_n^{*}+2b_na_n^{*})]\\
&+\frac{\mathrm{i}}{4k_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{(n-p)!}{(n+p)!}Q_{mp}Q_{m,p+1}^{*}\\
&\times[(E_0\tau_{pn}+\mathrm{i}H_0\pi_{pn})(E_0^{*}\tau_{p+1,n+1}-\mathrm{i}H_0^{*}\pi_{p+1,n+1})\\
&\times(a_n+a_{n+1}^{*}+2a_na_{n+1}^{*})+(E_0\pi_{pn}+\mathrm{i}H_0\tau_{pn})\\
&\times(E_0^{*}\pi_{p+1,n+1}-\mathrm{i}H_0^{*}\tau_{p+1,n+1})(b_n+b_{n+1}^{*}+2b_nb_{n+1}^{*})]\\
&-\frac{\mathrm{i}}{4k_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n-1}^{n-1}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{(n-p+1)!}{(n+p+1)!}Q_{mp}Q_{m,p+1}^{*}\\
&\times[(E_0\tau_{p,n+1}+\mathrm{i}H_0\pi_{p,n+1})(E_0^{*}\tau_{p+1,n}-\mathrm{i}H_0^{*}\pi_{p+1,n})\\
&\times(a_{n+1}+a_n^{*}+2a_{n+1}a_n^{*})+(E_0\pi_{p,n+1}+\mathrm{i}H_0\tau_{p,n+1})\\
&\times(E_0^{*}\pi_{p+1,n}-\mathrm{i}H_0^{*}\tau_{p+1,n})(b_{n+1}+b_n^{*}+2b_{n+1}b_n^{*})].
\end{aligned} \tag{П2}$$

Выражение для проекции F_z имеет вид

$$\begin{aligned}
F_z = &-\frac{1}{2k_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n}\frac{p(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\frac{(n-p)!}{(n+p)!}|Q_{mp}|^2\\
&\times\mathrm{Re}[(E_0\tau_{pn}+\mathrm{i}H_0\pi_{pn})(E_0^{*}\pi_{pn}-\mathrm{i}H_0^{*}\tau_{pn})(a_n+b_n^{*}+2a_nb_n^{*})]\\
&-\frac{1}{2k_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-n}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{(n-p+1)!}{(n+p)!}|Q_{mp}|^2\\
&\times\mathrm{Re}[(E_0\tau_{p,n+1}+\mathrm{i}H_0\pi_{p,n+1})(E_0^{*}\tau_{pn}-\mathrm{i}H_0^{*}\pi_{p,n})\\
&\times(a_{n+1}+a_n^{*}+2a_{n+1}a_n^{*})+(E_0\pi_{p,n+1}+\mathrm{i}H_0\tau_{p,n+1})\\
&\times(E_0^{*}\pi_{pn}-\mathrm{i}H_0^{*}\tau_{pn})(b_{n+1}+b_n^{*}+2b_{n+1}b_n^{*})].
\end{aligned} \tag{П3}$$

В случае сферической частицы, расположенной на оси z (при $l = 0$), компоненты $F_x = F_y = 0$, а в выражении для компоненты F_z суммирование по p отсутствует, и оно принимает вид

$$F_z = -\frac{1}{2k_0^2}\sum_{n=|m|}^{\infty}\frac{m(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$\times \mathrm{Re}[(E_0\tau_{mn} + \mathrm{i}H_0\pi_{mn})(E_0^*\pi_{mn} - \mathrm{i}H_0^*\tau_{mn})(a_n + b_n^* + 2a_nb_n^*)]$$

$$-\frac{1}{2k_0^2}\sum_{n=|m|}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{(n-m+1)!}{(n+m)!}$$

$$\times \mathrm{Re}[(E_0\tau_{m,n+1} + \mathrm{i}H_0\pi_{m,n+1})(E_0^*\tau_{mn} - \mathrm{i}H_0^*\pi_{mn})$$

$$\times(a_{n+1} + a_n^* + 2a_{n+1}a_n^*) + (E_0\pi_{m,n+1} + \mathrm{i}H_0\tau_{m,n+1})$$

$$\times(E_0^*\pi_{mn} - \mathrm{i}H_0^*\tau_{mn})(b_{n+1} + b_n^* + 2b_{n+1}b_n^*)], \qquad (\Pi 4)$$

где нижний индекс суммирования по n следует брать равным 1, если $m = 0$, и равным $|m|$, если $m \neq 0$. Разлагая выражение (П4) в ряд при $k_0a \to 0$, в частном случае $m = 0$ получаем следующее приближенное выражение для F_z с точностью до членов порядка $(k_0a)^6$:

$$F_z \approx \frac{(k_0a)^3}{2k_0^2}\cos\gamma\sin^2\gamma\left\{|E_0|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) + |H_0|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\right.$$

$$+\frac{3}{10}(k_0a)^2\left[|E_0|^2\,\mathrm{Im}\frac{(\varepsilon\mu-10)\varepsilon}{(\varepsilon+2)^2} + |H_0|^2\,\mathrm{Im}\frac{(\varepsilon\mu-10)\mu}{(\mu+2)^2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}(k_0a)^2\cos^2\gamma\left[|E_0|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+3}\right) + |H_0|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mu-1}{2\mu+3}\right)\right]$$

$$\left.+\frac{2}{3}(k_0a)^3\left[|E_0|^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2 + |H_0|^2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)^2\right]\right\}. \qquad (\Pi 5)$$

1. Ashkin A., in: *The Nobel Foundation* (2018); https://www.nobelprize.org/uploads/2018/10/ashkin-lecture.pdf.
2. Bouchal Z., Olivik M. *J. Mod. Opt*., **42**, 1555 (1995).
3. Durnin J. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 651 (1987).
4. Bouchal Z., Wagner J., Chlup M. *Opt. Commun*., **151**, 207 (1998).
5. Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H. *Phys. Rev. Lett*., **58**, 1499 (1987).
6. Herman R.M., Wiggins T.A. *J. Opt. Soc. Am. A*, **8**, 932 (1991).
7. Arlt J., Dholakia K. *Opt. Commun*., **177**, 297 (2000).
8. Schimpf D.N., Schulte J., Putnam W.P., Kartner F.X. *Opt. Express*, **20**, 26852 (2012).
9. Stsepuro N., Nosov P., Galkin M., Krasin G., Kovalev M., Kudryashov S. *Appl. Sci*., **10**, 7911 (2020).
10. Turunen J., Vasara A., Friberg A.T. *Appl. Opt*., **27**, 3959 (1988).
11. Vasara A., Turunen J., Friberg A.T. *J. Opt. Soc. Am. A*, **6**, 1748 (1989).
12. Lee H.S., Stewart B.W., Choi K., Fenichen H. *Phys. Rev. A*, **49**, 4922 (1994).
13. Chen W.T., Khorasaninejad M., Zhu A.Y., Oh J., Devlin R.C., Zaidi A., Capasso F. *Light Sci. Appl*., **6**, e16259 (2017).
14. Li D., Wang X., Ling J., Yuan Y. *Opt. Quantum Electron*., **53**, 143 (2021).
15. Chen L., Kanwal S., Yu B., Feng J., Tao C., Wen J., Zhang D. *Nanophotonics*, **11**, 967 (2022).
16. Yu Y.Z., Dou W.B. *Prog. Electromagn. Res. Lett*., **5**, 57 (2008).
17. Novitsky A.V., Barkovsky L.M. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt*., **7**, 550 (2005).
18. Novitsky A.V., Barkovsky L.M. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt*., **10**, 075006 (2008).
19. Brandao P.A., Pires D.G. *Phys. Lett. A*, **381**, 813 (2017).
20. Novitsky A.V. *Opt. Commun*., **281**, 5310 (2008).
21. Ma X., Li E. Chin. *Opt. Lett*., **8**, 1195 (2010).
22. Qu T., Wu Z.-S., Shang Q.-C., Li Z.-J., Bai L. *J. Opt. Soc. Am. A*, **30**, 1661 (2013).
23. Yang Y., Zizhuo N., Feng Y., Li R. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf*., **240**, 106705 (2020).
24. Klimov V. *Opt. Lett*., **45**, 4300 (2020).
25. Klimov V., Heydarian R., Simovsky C. *J. Opt. Soc. Am. B*, **38**, C84 (2021).
26. Novitsky A., Qiu C.-W., Wang H. *Phys. Rev. Lett*., **107**, 203601 (2011).
27. Chen J., Ng J., Lin Z., Chan C.T. *Nat. Photonics*, **5**, 531 (2011).
28. Novitsky A., Qiu C.-W., Lavrinenko A. *Phys. Rev. Lett*., **109**, 023902 (2012).
29. Wang N., Chen J., Liu S., Lin Z. *Phys. Rev. B*, **87**, 063812 (2013).
30. Mitri F.G., Li R.X., Guo L.X., Ding C.Y. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf*., **187**, 97 (2017).
31. Li R., Ding C., Mitri F.G. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf*., **196**, 53 (2017).
32. Novitsky A., Ding W., Wang M., Gao D., Lavrinenko A.V., Qiu C.-W. *Sci. Rep*., **7**, 652 (2017).
33. Li R., Li P., Zhang J., Ding C., Cui Z. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf*., **219**, 186 (2018).
34. Li X., Chen J., Lin Z., Ng J. *Sci. Adv*., **5**, eaau7814 (2019).
35. Ding W., Zhu T., Zhou L.-M., Qiu C.-W. *Adv. Photonics*, **1**, 024001 (2019).
36. Silva G.T., Lopes J.H., Mitri F.G. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectrics. Freq. Contr*., **60**, 1207 (2013).
37. Fan X.-D., Zhang L. *Phys. Rev. Appl*., **11**, 014055 (2019).
38. Brzobohaty O., Karasek V., Siler M., Chvatal L., Cizmar T., Zemanek P. *Nat. Photonics*, **7**, 123 (2013).
39. Damkova J., Chvatal L., Jezek J., Oulehla J., Brzobohaty O., Zemanek P. *Light Sci. Appl*., **7**, 17135 (2018).
40. Arlt J., Garces-Chavez V., Sibbett W., Dholakia K. *Opt. Commun*., **197**, 239 (2001).
41. Volke-Sepulveda K., Garces-Chavez V., Chavez-Cerda S., Arlt J., Dholakia K. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt*., **4**, S82 (2002).
42. McGloin D., Garces-Chavez V., Dholakia K. *Opt. Lett*., **28**, 657 (2003).
43. Cizmar T., Kollarova V., Bouchal Z., Zemanek P. *New J. Phys*., **8**, 1367 (2006).
44. Karasek V., Cizmar T., Brozobohaty O., Zemanek P. *Phys. Rev. Lett*., **101**, 143601 (2008).
45. Siler M., Jakl P., Brzobohaty O., Zemanek P. *Opt. Express*, **20**, 24304 (2012).
46. Ambrosio L.A., Zamboni-Rached M. *J. Opt. Soc. Am. B*, **32**, B37 (2015).
47. Соколенко Б.В., Шостка Н.В., Каракчиева О.С. *УФН*, **192**, 867 (2022).
48. Gouesbet G., Grehan G. *Generalized Lorenz-Mie Theories* (Berlin: Springer-Verlag, 2011).
49. Taylor J.M., Love G.D. *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 278 (2009).
50. Neves A.A.R., Fontes A., Padilha L.A., Rodriguez E., de Brito Cruz C.H., Barbosa L.C., Cezar C.L. *Opt. Lett*., **31**, 2477 (2006).
51. Chen J., Ng J., Wang P., Lin Z. *Opt. Lett*., **35**, 1674 (2010).
52. Song S., Wang N., Lu W., Lin Z. *J. Opt. Soc. Am. A*, **31**, 2192 (2014).
53. Ambrosio L.A., Hernandez-Figueroa H.E. *Metamaterials*, **6**, 51 (2012).
54. Рубинов А.Н., Афанасьев А.А., Ермолаев И.Е., Курочкин Ю.А., Михневич С.Ю. *ЖПС*, **70**, 502 (2002) [*J. Appl. Spectrosc*., **70**, 565 (2003)].
55. Yang R., Li R. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf*., **178**, 230 (2016).
56. Martson P.L. *J. Acoust. Soc. Am*., **120**, 3523 (2006).
57. Martson P.L. *J. Acoust. Soc. Am*., **121**, 753 (2007).
58. Martson P.L. *J. Acoust. Soc. Am*., **125**, 3539 (2009).

59. Baresch D., Thomas J.-L., Marchiano R. *J. Acoust. Soc. Am.*, **133**, 25 (2013).
60. Poletti M.A. *J. Acoust. Soc. Am.*, **141**, 2069 (2017).
61. Zhang L. *Phys. Rev. Appl.*, **10**, 034039 (2018).
62. Zhang L. *J. Acoust. Soc. Am.*, **143**, 2796 (2018).
63. McGloin D., Dholakia K. *Contemp. Phys.*, **46**, 15 (2005).
64. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовитца, И.Стиган (М.: Наука, 1979) [Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds) *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1964)].
65. Стрэттон Дж.А. *Теория электромагнетизма* (М.–Л.: ГИТТЛ, 1948) [Stratton J.A. *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941)].
66. Борен К., Хафмен Д. *Поглощение и рассеяние света малыми частицами* (М.: Мир, 1986) [Bohren C.F., Huffman D.R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (New York: John Wiley & Sons, 1983)].
67. Гобсон Е.В. *Теория сферических и сфероидальных функций* (М.: ИЛ, 1952) [Hobson E.W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1931)].
68. Иванов Е.А. *Дифракция электромагнитных волн на двух телах* (Минск: Наука и техника, 1968) [Ivanov Ye.A. *Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies* (Washington: NASA, 1970)].
69. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988).
70. Klimov V.V. *Opt. Commun.*, **211**, 183 (2002).
71. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. *УФН*, **174**, 1273 (2004) [*Phys. Usp.*, **47**, 1177 (2004)].
72. Порфирьев А.П., Кучмижак А.А., Гурбатов С.О., Йодказис С., Хонина С.Н., Кульчин Ю.Н. *УФН*, **192**, 841 (2022).
73. Padgett M., Bowman R. *Nat. Photonics*, **5**, 343 (2011).