Неустойчивость оптических фазовых и поляризационных сингулярностей высших порядков в однородной линейной среде

Н.Н.Розанов

Проанализирован характер развития неустойчивости пучков монохроматического излучения с сингулярностями высших порядков в однородной изотропной линейной среде. Проведено сравнение со случаем нелинейных сред и обсуждена возможность эксперимента.

Ключевые слова: *гауссовы пучки, дислокации волнового фронта, поляризационные сингулярности.*

1. Введение

Интенсивно развивающаяся топологическая оптика, объектом исследования которой служат пучки излучения с принципиально не определяемыми в некоторых точках, на некоторых линиях или поверхностях характеристиками волнового фронта или поляризационной структуры, перспективна ввиду большого числа приложений, например формирование оптических ловушек, управление положением микрочастиц, транспортировка лазерного излучения и кодирование переносимой такими пучками информации [1–8]. Так, для излучения с фиксированной поляризацией наиболее важны сингулярности в виде дислокаций волнового фронта. В центре дислокации интенсивность монохроматического излучения обращается в нуль, и фаза волны соответственно не определена. При обходе вокруг центра по замкнутому контуру в плоскости, ортогональной основному направлению распространения пучка, фаза волны изменяется на величину $\pm 2\pi m$, где $\pm m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) – целочисленный топологический заряд данной сингулярности. Для поляризованного излучения общим случаем является эллиптическая поляризация. Среди поляризационных сингулярностей различают V-точки, где интенсивность также обращается в нуль, и поэтому поляризация не определена, C-точки, в которых излучение имеет круговую поляризацию и для которых нельзя указать направление главной оси эллипса, а также L-точки, где излучение линейно поляризовано и нельзя указать направление вращения вектора электрической напряженности со временем по поляризационному эллипсу. Совокупности сингулярных точек могут образовывать линии и поверхности. Поляризационные сингулярности характеризуются полуцелым индексом Пуанкаре η, равным изменению угла, характеризующего направление главной оси поляризационного эллипса, при аналогичном обходе сингулярной точки, деленному на 2π. В рамках квазиоптического подхода, справедливого для пучков квазимонохроматического излучения с диаметром, заметно превышающим длину волны, выполняются правила сохранения суммарного топологического заряда при распространении волны, что позволяет говорить, в случае устойчивости таких пучков, о топологической защищенности информации, записанной с помощью топологических характеристик.

Естественно, что возможности, например, кодирования информации значительно расширяются при использовании пучков с большими топологическими индексами. Однако, как указали Баранова и Зельдович [9] (см. также [2]), для излучения с фиксированной поляризацией многократные вихри излучения (заряд $|m| > 1$) в линейной однородной среде неустойчивы, т.к. при малейших возмущениях они либо распадаются на $|m|$ однократных вихрей (с зарядом ± 1), либо исчезают. Строго говоря, для подтверждения неустойчивости многократных вихрей следовало бы проследить за расщепленными дислокациями волнового фронта на больших расстояниях от возмущений (много бóльших дифракционной длины). Считая, что случай неустойчивости означает неограниченно большое расщепление дислокации при произвольно малых исходных возмущениях, мы продемонстрируем это расщепление для гауссовых пучков высших порядков.

Насколько нам известно, тема устойчивости поляризационных сингулярностей высших порядков в литературе достаточно подробно не обсуждалась. В настоящей статье мы рассмотрим и этот вопрос также на примере гауссовых пучков высших порядков.

2. Дислокации волнового фронта

Рассмотрим распространение монохроматического излучения в линейной и однородной среде, например в вакууме. В этом разделе мы ограничимся только сингулярностями волнового фронта излучения с фиксированной, линейной или круговой, поляризацией. Такое излучение характеризуется огибающей напряженности электрического поля E с медленной зависимостью от координат и волновым числом $k = (\omega/c)n$, где ω – частота излучения, c – скорость света в вакууме и n – показатель преломления среды. В квазиоптическом приближении уравнение распространения имеет вид

Н.Н.Розанов. Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН, Россия, 194021 С.-Петербург, Политехническая ул., 26; e-mail: nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 17 ноября 2022 г.

$$2\mathrm{i}k\frac{\partial E}{\partial z}+\Delta_\perp E=0,\ \ \Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{1}$$

Здесь z – продольная координата преимущественного распространения пучка; x и y – поперечные декартовы координаты; z, r и φ – цилиндрические координаты. Традиционно в цилиндрических координатах поле представляется в виде пучков Лагерра–Гаусса [10, 11], но для указанной выше задачи это неудобно. Мы будем рассматривать пучки автомодельного вида с целочисленными топологическими зарядами $\pm m$:

$$E_{\pm m}=F_m(r,z)\exp(\pm\mathrm{i}m\varphi),\quad m=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

$$F_m(r,z)=a_m(z)r^m\exp[-b_m(z)r^2]. \tag{3}$$

Для представляющих физический интерес пучков с конечной мощностью должно выполняться условие $\mathrm{Re}\,b_m(z)>0$. Для таких пучков квазиоптическое уравнение (1) принимает вид

$$2\mathrm{i}k\frac{\partial F_m}{\partial z}+\frac{\partial^2 F_m}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_m}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}F_m=0 \tag{4}$$

и сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$2\mathrm{i}kb'_m=4b_m^2, \tag{5}$$

$$\frac{a'_m}{a_m}=-\frac{2\mathrm{i}}{k}(m+1)b_m, \tag{6}$$

где штрих означает производную по координате z. Решения этих уравнений таковы:

$$b_m(z)=b_{m0}\Big(1+\frac{2\mathrm{i}}{k}b_{m0}z\Big)^{-1}, \tag{7}$$

$$a_m=a_{m0}\Big(1+\frac{2\mathrm{i}}{k}b_{m0}z\Big)^{-(m+1/2)}. \tag{8}$$

Здесь плоскость перетяжки отвечает координате $z=0$. В данной плоскости задаются (комплексная) амплитуда пучка $a_{m0}=a_m(z=0)$ и величина $b_{m0}=b_m(z=0)$, причем при плоском волновом фронте в плоскости $z=0$ мы полагаем $\mathrm{Im}b_{m0}=0$ и $b_{m0}=\mathrm{Re}\,b_{m0}>0$. Для фундаментального гауссова пучка ($m=0$) эта величина представляет собой обратный квадрат радиуса пучка: $b_{00}=w_{00}^{-2}$, а вне плоскости радиус пучка $w_{00}(z)=[1+(z/L_\mathrm{d})^2]^{1/2}$, где $L_\mathrm{d}=k/(2b_{00})$ – дифракционная длина. В результате получаем

$$E_{\pm m}=a_{m0}\Big(1+\mathrm{i}\frac{b_{m0}}{b_{00}}\frac{z}{L_\mathrm{d}}\Big)^{-(m+1/2)}$$
$$\times r^m\exp\Bigg(-\frac{b_{m0}}{1+\mathrm{i}\dfrac{b_{m0}}{b_{00}}\dfrac{z}{L_\mathrm{d}}}r^2\Bigg)\exp(\pm\mathrm{i}m\varphi). \tag{9}$$

Распределение интенсивности пучков излучения осесимметрично, и на оси симметрии при $m\geqslant 1$ имеется нуль m-го порядка, т. е. ось z является m-кратно вырожденной вихревой линией. При обходе оси по замкнутому контуру в поперечном сечении поле испытывает набег фазы $\pm 2\pi m$ (вихрь поперечного потока электромагнитной энергии, т. е. вектора Пойнтинга).

Проверим теперь устойчивость вихря m-го порядка ($m\geqslant 1$) по отношению к введению соосного с вихревым фундаментального пучка с той же плоскостью перетяжки и с малой амплитудой. Кроме того, для упрощения записи положим, что определяющие ширину пучков параметры b_{m0} и b_{00} совпадают: $b_{m0}=b_{00}=b_0$. Хотя это далеко не самый общий вид возмущения, но он вполне достаточен для наших целей. Тогда суммарное поле с использованием (9) примет вид

$$E_{\pm m}=F_m(r,z)\exp(\mathrm{i}m\varphi)+F_0(r,z)$$
$$=\Big[a_{m0}\Big(1+\mathrm{i}\frac{z}{L_\mathrm{d}}\Big)^{-m}r^m\exp(\pm\mathrm{i}m\varphi)+a_{00}\Big]\Big(1+\mathrm{i}\frac{z}{L_\mathrm{d}}\Big)^{-1/2}$$
$$\times\exp\Bigg(-\frac{b_0}{1+\mathrm{i}\dfrac{z}{L_\mathrm{d}}}r^2\Bigg). \tag{10}$$

Нули суммарного поля совпадают с нулями выражения в квадратных скобках, откуда для продольной зависимости координат r, φ нулей имеем соотношение

$$r^m\exp(\pm\,\mathrm{i}m\varphi)=-\frac{a_{00}}{a_{m0}}\Big(1+\mathrm{i}\frac{z}{L_\mathrm{d}}\Big)^m. \tag{11}$$

Из сравнения модулей левой и правой частей (11) видно, что нули поля уже не расположены на оси z, а смещены от нее в поперечном направлении на величину

$$r=\Big|\frac{a_{00}}{a_{m0}}\Big|^{1/m}\Big[1+\Big(\frac{z}{L_\mathrm{d}}\Big)^2\Big]^{1/2}. \tag{12}$$

Радиус окружности, на которой расположены нули поля, растет с ростом z по тому же закону, что и радиус фундаментального гауссова пучка. При $z\gg L_\mathrm{d}$ отклонение вихревых линий от оси симметрии интенсивности увеличивается пропорционально пройденному пути, $r\approx|a_{00}/a_{m0}|^{1/m}(z/L_\mathrm{d})$. Равенство аргументов тех же частей (11) позволяет найти азимутальные углы нулей:

$$\pm m\varphi=2\pi N+(\arg a_{m0}-\arg a_{00})+\arctan(z/L_\mathrm{d}), \tag{13}$$

где N – целое число. Согласно (13), на окружности радиусом r (см. формулу (12)) располагаются m нулей, азимутальные углы которых различаются на $2\pi/m$. При увеличении z от плоскости перетяжки ($z=0$) до бесконечности азимутальный угол сдвигается на π/m в направлении, определяемом знаком топологического заряда.

При $m=1$ имеется только один нуль, и хотя вихревая линия для него при $z\gg L_\mathrm{d}$ существенно отклоняется от оси симметрии интенсивности, это не означает неустойчивости вихревого пучка с единичным топологическим зарядом (изменение не имеет топологического характера). При $m=2$ исходный двукратный вихрь распадается на два вихря, расположенные на окружности (см. формулу (12)) диаметрально противоположно. При бóльших m нули находятся в вершинах правильных m-угольников. Таким образом, при $m\geqslant 2$ топология волнового фронта качественно изменяется: при малейших возмущениях единая вихревая линия расщепляется на m линий с единичными топологическими зарядами, которые с ростом пройденного пути расходятся неограниченно далеко друг от друга. Тем самым оптические вихри высших порядков в однородной линейной среде оказываются неустойчивыми, хотя неустойчивость характеризуется не экспоненциальной, а только алгебраической зависимостью от отношения длины трассы z к дифракционной длине L_d. Это ограничивает перспективы использования пучков с вихрями высших порядков для передачи информации, кодируемой топологическими зарядами.

Поучительно сравнение устойчивости оптических вихревых пучков высших порядков в рассмотренном варианте линейной среды и в нелинейных средах (среды однородны). Как показано в [12], в прозрачной среде с керровской нелинейностью показателя преломления такие пучки тоже неустойчивы, т.е. нелинейная фокусировка в прозрачной (без диссипации) среде не останавливает развитие неустойчивости. Та же ситуация имеет место и в импульсных режимах при генерации суперконтинуума [13]. Насколько нам известно, устойчивость оптических вихрей высших порядков в однородной среде подтверждена для сред не только нелинейных, но и диссипативных, например для лазерных сред с нелинейными усилением и поглощением [14–16].

3. Поляризационные сингулярности

В рамках квазиоптического приближения (широкие пучки монохроматического излучения) продольная составляющая электрической напряженности мала и заметной амплитудой обладают только поперечные составляющие напряженности:

$$\boldsymbol{E} = E_x(x,y)\boldsymbol{e}_x + E_y(x,y)\boldsymbol{e}_y. \tag{14}$$

Здесь $\boldsymbol{e}_{x,y}$ – орты по соответствующим направлениям. Вместо разложения по декартовым компонентам огибающей удобно использовать разложение по круговым компонентам $E_\pm$, которые связаны с декартовыми соотношением $E_\pm = (E_x \pm \mathrm{i}E_y)/\sqrt{2}$. Для каждой из круговых компонент мы можем задать огибающую вида (9) с различающимися амплитудами $a_{m0}^{(\pm)}$ и топологическими зарядами $m_\pm$. Суммарная интенсивность результирующего поля осесимметрична, поляризация в общем случае является эллиптической и меняется по поперечному сечению, а индекс Пуанкаре

$$\eta = (m_+ - m_-)/2. \tag{15}$$

При $m_+ \neq 0$ и $m_- \neq 0$ интенсивность поля в центре симметрии обращается в нуль, т.е. имеется сингулярность в виде V-точки в поперечном сечении или V-линии, совпадающей с осью z в трехмерном пространстве. Из предыдущего раздела следует, что внесение малого возмущения в виде скалярного фундаментального гауссова пучка (с нулевым топологическим зарядом) приводит к расщеплению кратной V-точки или V-линии, если $|m_+| > 1$ или $|m_-| > 1$. Если же $m_+ \neq 0$, $m_- = 0$ или $m_+ = 0$, $m_- \neq 0$, то в центре симметрии находится C-точка (C-линия), в которой излучение поляризовано по кругу. На том же основании можно утверждать, что пучки с компонентами круговых поляризаций, обладающими неединичными топологическими зарядами, неустойчивы. Как и в случае дислокаций волнового фронта, неустойчивость имеет алгебраический (степенной при больших длинах трассы) характер с расщеплением точек или линий с кратной сингулярностью на ряд таковых с единичными сингулярностями. Расщепление последних с ростом пройденного пути описывается зависимостью от z радиуса гауссовых пучков $w_{00}(z)$. И здесь следует отметить, что в нелинейных диссипативных средах или лазерах указанная неустойчивость может быть подавлена и возможно существование поляризованных диссипативных солитонов даже с весьма большими топологическими индексами [16, 17].

4. Заключение

Таким образом, пучки монохроматического излучения с фазовыми и поляризационными сингулярностями высших порядков в однородной линейной среде оказываются неустойчивыми. Неустойчивость характеризуется алгебраической зависимостью от продольной координаты, развиваясь на длинах трассы порядка дифракционной длины. Хотя данный вывод сделан на основе анализа гауссовых пучков специального вида, нам представляется, что он имеет общий характер. Это обстоятельство ограничивает использование пучков излучения с высшими сингулярностями для приложений.

Приведенные выводы допускают экспериментальную проверку, более простую для пучков с фиксированной поляризацией излучения. Для этого достаточно сформировать соосные фундаментальный гауссов пучок ($m = 0$) с малой амплитудой и интенсивный пучок с квадратичной дислокацией ($m = 2$) монохроматического излучения. При совмещении плоскостей перетяжки указанных двух пучков на расстоянии от плоскости перетяжки в несколько дифракционных длин можно наблюдать в поперечном сечении расположение двух фазовых сингулярностей, которое определяется соотношениями (12) и (13).

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 18-12-00075.

1. Simon D.S. *Topology in Optics: Tying Light in Knots* (Bristol, IOP Publishing, 2021).
2. Soskin M.S., Vasnetsov M.V. *Progress in Optics*, **42**, 219 (2001).
3. Berry M.V., Dennis M.R. *Proc. R. Soc. London A*, **457**, 141 (2001).
4. Freund I. *Opt. Commun*., **201**, 251 (2002).
5. Ruchi, Senthilkumaran P., Pal S.K. *Int. J. Opt*., **2020**, 2812803 (2020).
6. Wang Q., Tu C.-H., Li Y.-N., Wang H.-T. *APL Photonics*, **6**, 040901 (2021).
7. Angelsky O.V., Bekshaev A.Y., Hanson S.G., Zenkova C.Y., Mokhun I.I., Jun Z. *Front. Phys*., **8**, 114 (2020).
8. Ruchi, Senthilkumaran P. *Front. Phys*., **10**, 3389 (2020).
9. Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. *ЖЭТФ*, **80** (5), 1789 (1981) [*Sov. Phys. JETP*, **53** (5), 925 (1981)].
10. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М.: Наука, 1979).
11. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М.: Наука, 1990).
12. Kruglov V.I., Logvin Yu.A., Volkov V.M. *J. Mod. Opt*., **39**, 2277 (1992).
13. Власов Р.А., Волков В.М., Дедков Д.Ю. *Квантовая электроника*, **43** (2), 157 (2013) [*Quantum Electron*., **43** (2), 157 (2013)].
14. Fedorov S.V., Rosanov N.N., Shatsev A.N., Veretenov N.A., Vladimirov A.G. *IEEE J. Quantum Electron*., **39**, 197 (2003).
15. Розанов Н.Н. *Диссипативные оптические и родственные солитоны* (М.: Физматлит, 2021).
16. Веретенов Н.А., Розанов Н.Н., Федоров С.В. *УФН*, **192** (2), 143 (2022) [*Phys. Usp*., **65** (2), 131 (2022)].
17. Veretenov N.A., Fedorov S.V., Rosanov N.N. *Phys. Rev. A*, **107**, 013512 (2023).