Моделирование траекторий косых лучей в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления

А.А.Маковецкий, С.М.Попов, Д.В.Ряховский

В рамках модели геометрической оптики разработан алгоритм расчета траекторий косых лучей (гибридных мод) в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления. Первый (трехмерный) вариант алгоритма сводится к последовательному расчету координат точек отражения луча в векторной форме, второй (двумерный) вариант – к независимому расчету поперечных координат точек отражения с последующим расчетом продольной (осевой) координаты. Результаты расчетов по двум вариантам алгоритма совпадают. С помощью разработанного алгоритма смоделированы траектории косых лучей в оптическом волокне с диаметром сердцевины 400 мкм при различных условиях возбуждения. Рассчитаны проекции траекторий лучей на выходной торец волокна. Характерный топологический вид проекций – кольцо-огибающая, внутренняя граница которой определяет каустику. Выявлены «резонансные» виды проекций траекторий лучей. Проведена проверка разработанного алгоритма расчета в экспериментах по возбуждению косых лучей (λ = 532 нм) в кварц-полимерном оптическом волокне с диаметром сердцевины 400 и 600 мкм.

Ключевые слова: *многомодовое оптическое волокно, расчет траекторий косых лучей, проекции траекторий и их топологические свойства.*

1. Введение

Известно, что применение аппарата геометрической оптики позволяет получить приближенные решения волновых уравнений, облегчающие их анализ [1]. Рассматриваемые в рамках геометрической оптики косые лучи в диэлектрических оптических волокнах (ОВ) являются качественными аналогами гибридных мод многомодовых ОВ [2, 3]. Характерная особенность в распределении интенсивности поля гибридной моды – наличие темного пятна в поперечном сечении (каустики излучения), диаметр которого зависит от топологического заряда (азимутального числа) моды $|l| \geqslant 1$. Линейная комбинация гибридных мод со сдвигом по фазе на $\pi/2$ может создать моду с вращающимся волновым фронтом (оптический вихрь), обладающую орбитальным угловым моментом [4]. Оптические вихри могут механически взаимодействовать с микрочастицами вещества размером от единиц до десятков микрометров [5, 6]. Кроме того, они обладают рядом других полезных свойств и перспективны при решении многих прикладных и фундаментальных задач оптики и фотоники.

Основные свойства многомодовых диэлектрических оптических волокон описаны в классических работах [2, 3, 7], где дана общая постановка задачи ввода косого луча в ОВ, рассчитаны длина луча между соседними отражениями, каустика лучей, действительная числовая апертура ОВ при возбуждении косого луча, а также сделаны оценки числа отражений луча. Однако в них нет полного расчета и, соответственно, детального анализа траекторий косых лучей и особенностей каустики излучения. Между тем такой анализ мог бы выявить новые свойства косых лучей.

В связи с вышесказанным целью настоящей работы была разработка алгоритма расчета траекторий косых лучей в многомодовых ОВ, анализ траекторий таких лучей, а также качественная экспериментальная проверка разработанного алгоритма.

2. Алгоритм расчета траектории луча (вариант 1)

Обозначим через n_c и n_{sh} показатели преломления сердцевины и оболочки соответственно, R – радиус сердцевины ОВ. Введем декартову систему координат xyz, в которой начало координат точка О лежит в центре входного торца ОВ, а ось Оz совпадает с осью ОВ, и сферическую систему (r, φ, θ). Координаты двух систем связаны соотношениями: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$.

Выберем для упрощения анализа $\varphi = \pi/2$. Запишем компоненты единичного вектора $\boldsymbol{e}_1$, определяющего направление первого падающего луча, как $\boldsymbol{e}_1(0, \sin\theta, \cos\theta)$, где угол θ задан в сердцевине ОВ. Сместим точку падения луча на торце ОВ из его центра (точки О) в точку P_0, расположенную на оси Оx на расстоянии x_s от центра; ее координаты – $P_0(x_s, 0, 0)$ (рис.1). Построим решение, используя методы аналитической геометрии.

Шаг 1. Найдем координаты точки первого падения луча на цилиндрическую отражающую поверхность $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Зададим прямую, исходящую из точки $P_0(x_s, 0, 0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{e}_1$:

$$x = x_s + t_1 \cdot 0, \quad y = 0 + t_1\sin\theta, \quad z = 0 + t_1\cos\theta, \qquad (1)$$

где t_1 – параметр. Координаты искомой точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ должны удовлетворять уравнению

А.А.Маковецкий, С.М.Попов, Д.В.Ряховский. Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, Россия, Московская обл., 141190 Фрязино, пл. Акад. Введенского, 1; e-mail: maz226@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 16 марта 2023 г., после доработки – 25 апреля 2023 г.

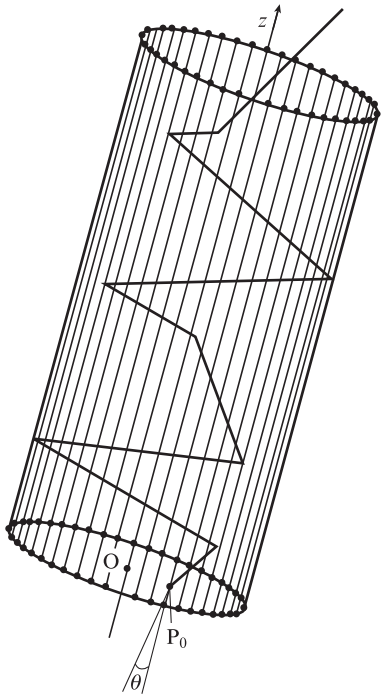

Рис.1. Схема распространения косого луча в оптическом волокне.

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2}$$

Подставив выражение (1) в (2), получим уравнение для параметра t_1, соответствующего первой точке отражения луча $P_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$x_s^2 + t_1^2 \sin^2\theta = R^2. \tag{3}$$

После подстановки решения уравнения (3) $t_1 = \sqrt{R^2 - x_s^2} \times (\sin\theta)^{-1}$ в (1) находим координаты точки P_1 отражения луча от цилиндрической поверхности:

$$x_1 = x_s,\ y_1 = \sqrt{R^2 - x_s^2},\quad z_1 = \sqrt{R^2 - x_s^2}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{4}$$

Заметим, что поперечные координаты x_1 и y_1, как и поперечные координаты всех последующих точек отражения (падения), не зависят от угла падения луча θ на входной торец OB.

Угол падения первого луча на границу раздела сердцевина/оболочка задается через скалярное произведение векторов формулой

$$\cos\theta_1 = \frac{(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1)}{(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)^{0.5} (\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1)^{0.5}} \equiv \sqrt{R^2 - x_s^2}\,\frac{\sin\theta}{R}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{n}_1(x_1, y_1, 0)$ – внешняя нормаль к цилиндрической границе раздела сердцевина/оболочка в точке $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Заметим, что для всех точек границы раздела сердцевина/оболочка нормаль параллельна плоскости Oxy.

Шаг 2. Определим компоненты направляющего вектора первого отраженного луча $\boldsymbol{e}_{1r}$ $(m_1, p_1, 1)$. Этот вектор должен удовлетворять двум условиям: 1) быть ортогональным нормали $\boldsymbol{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ к плоскости падения первого луча $F_1(x, y, z) = 0$, задаваемой точкой ввода луча $P_0(x_s, 0, 0)$, точкой первого отражения $P_1(x_s, \sqrt{R^2 - x_s^2}, \sqrt{R^2 - x_s^2}\cos\theta/\sin\theta)$ и точкой пересечения внутренней нормали $\boldsymbol{n}_{1\,\mathrm{in}}$ с цилиндрической поверхностью $P_{1\,\mathrm{op}}(-x_s, -\sqrt{R^2 - x_s^2}, \sqrt{R^2 - x_s^2}\cos\theta/\sin\theta)$; 2) составлять с нормалью $\boldsymbol{n}_{1\,\mathrm{in}}$ угол θ_{1r}, равный углу падения θ_1.

Запишем функцию $F_1(x, y, z)$ в виде определителя и в нормальном виде:

$$F_1(x, y, z) = \left\| \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ -x_1 - x_1 & -y_1 - y_1 & z_1 - z_1 \end{pmatrix} \right\|, \tag{6}$$

$$F_1(x, y, z) = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1, \tag{7}$$

где $A_1 = F_1(x_1 + 1, y_1, z_1)$, $B_1 = F_1(x_1, y_1 + 1, z_1)$, $C_1 = F_1(x_1, y_1, z_1 + 1)$ и $D_1 = F_1(0, 0, 0)$.

Из условия ортогональности векторов $\boldsymbol{e}_{1r}$ и $\boldsymbol{N}_1$ $(A_1 m_1 + B_1 p_1 + C_1 \cdot 1 = 0)$ имеем

$$p_1 = \frac{A_1 m_1 + C_1}{-B_1}. \tag{8}$$

Первый отраженный угол задается выражением $\cos\theta_{1r} = (\boldsymbol{e}_{1r} \cdot \boldsymbol{n}_1)/[(\boldsymbol{e}_{1r} \cdot \boldsymbol{e}_{1r})^{0.5} (\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1)^{0.5}]$. Раскроем это выражение, подставим в него (8) и приравняем к $\cos\theta_1$. В результате получим уравнение для первой компоненты m_1 вектора $\boldsymbol{e}_{1r}$:

$$\frac{x_1 m_1 - y_1 \dfrac{A_1 m_1 + C_1 \cdot 1}{B_1}}{R\sqrt{m_1^2 + \left[\dfrac{-(A_1 m_1 + C_1)}{B_1}\right]^2 + 1}} + \sqrt{R^2 - x_s^2}\,\frac{\sin\theta}{R} = 0. \tag{9}$$

Обозначив левую часть уравнения (9) через $f_1(m_1)$, решим его с помощью процедуры Mathcad: $m_1 = \mathrm{root}(f_1(x), x, -1, 1)$. Из соотношения (8) найдем вторую компоненту p_1 вектора $\boldsymbol{e}_{1r}$.

Определив компоненты вектора $\boldsymbol{e}_{1r}$, найдем координаты второй точки отражения:

$$x_2 = x_1 + m_1 t_2,\quad y_2 = y_1 + p_1 t_2,\quad z_2 = z_1 + 1 \cdot t_2, \tag{10}$$

где

$$t_2 = \frac{-2(x_1 m_1 + y_1 p_1)}{m_1^2 + p_1^2}.$$

Длина отрезка луча между любыми соседними отражениями l_r, длина проекции луча l_{pr} и осевой шаг луча Δz задаются формулами

$$l_r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \equiv 2\frac{\sqrt{R^2 - x_s^2}}{\sin\theta}, \tag{11}$$

$$\Delta l_{pr} = 2\sqrt{R^2 - x_s^2}, \tag{12}$$

$$\Delta z = 2\sqrt{R^2 - x_s^2}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{13}$$

Для определения координат последующих точек отражения необходимо повторить проделанную выше процедуру циклическим образом.

В каждой точке отражения падающий и отраженный лучи лежат в плоскости, задаваемой падающим лучом и нормалью в точке отражения (плоскость луча). При достижении отраженным лучом следующей точки отраже-

ния он вместе с новой нормалью формирует следующую плоскость луча. Падающий луч является границей раздела двух соседних плоскостей. Все плоскости лучей наклонены к плоскости торца ОВ под одним и тем же углом α, определяемым формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_s}{\sqrt{R^2\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + x_s^2}}.$$

Сечение цилиндрической поверхности плоскостью луча представляет собой эллипс с полуосями, равными R и $R/\cos\alpha$. Отражение луча происходит в точке, соответствующей малой полуоси эллипса. Углы между любыми соседними плоскостями также одинаковы, величину угла можно задать формулой $\cos\gamma = (\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2)/[(\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_1)^{0.5} \times (\boldsymbol{N}_2\cdot\boldsymbol{N}_2)^{0.5}]$, где $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ – нормали к соседним плоскостям.

Из условия достижения падающим углом полного внутреннего отражения ($\sin\theta_1 = n_{sh}/n_c$) с учетом формулы (5) для $\cos\theta_1$ получаем выражение для действительной числовой апертуры NA_a [2]:

$$NA_a = \frac{NA}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x_s}{R}\right)^2}}, \qquad (14)$$

где $NA = \sqrt{n_c^2 - n_{sh}^2}$ – номинальная числовая апертура ОВ.

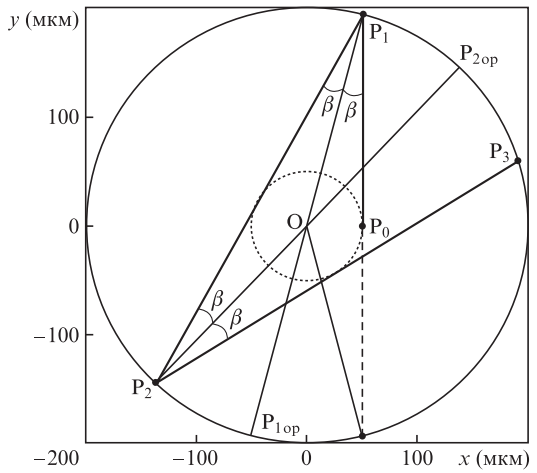

Рис.2. Геометрические построения, поясняющие вывод формул для расчета поперечных координат точек отражения косого луча. Величины углов: $\angle P_0P_1O = \angle OP_1P_2 = \beta$, $\angle P_1P_2O = \angle OP_2P_1 = \beta$, $\angle P_2OP_{1op} = 2\beta$, $\angle P_2OP_1 = \pi - 2\beta$. Длины отрезков: $OP_1 = R$, $OP_0 = x_s$. Прямые P_1P_{1op} и P_2P_{2op} – проекции нормалей $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ к цилиндрической поверхности в точках P_1 и P_2.

3. Алгоритм расчета траектории луча (вариант 2)

Для прямолинейного ОВ со ступенчатым профилем показателя преломления трехмерную задачу расчета координат (x_i, y_i, z_i) точек отражения косого луча можно свести к двумерной задаче для поперечных координат (x_i, y_i) с последующим расчетом продольной координаты z_i.

Введем следующие обозначения: $\beta = \mathrm{Arcsin}(x_s/R)$ (рис.2), $\psi_1 = \pi/2 - \beta$, $\psi_i = \psi_1 + (i-1)(\pi - 2\beta)$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда поперечные координаты точек отражения x_i и y_i рассчитываются по формулам

$$x_i = R\cos\psi_i, \quad y_i = R\sin\psi_i. \qquad (15)$$

Осевые координаты точек отражения z_i задаются выражением

$$z_i = z_1 + (i-1)\Delta z, \qquad (16)$$

где $\Delta z = 2\sqrt{R^2 - x_s^2}\cos\theta/\sin\theta$ – шаг луча в осевом направлении.

Обозначим длину ОВ как L, тогда число отражений луча p можно записать в виде

$$p = \mathrm{trunc}(L/\Delta z), \qquad (17)$$

где $\mathrm{trunc}(x)$ – целая часть x.

Обозначим $\delta z = L - \Delta z\,\mathrm{trunc}(L/\Delta z)$ – остаток длины ОВ после p-го отражения. Тогда для координат x_{out} и y_{out} точки выхода луча из ОВ справедливы формулы

$$x_{out} = x_p + (x_{p+1} - x_p)\frac{\delta z}{\Delta z}, \quad y_{out} = y_p + (y_{p+1} - y_p)\frac{\delta z}{\Delta z}. \qquad (18)$$

Отметим, что угол наклона вышедшего из ОВ луча к его оси равен углу наклона падающего луча: $\theta_{out} = \theta$.

4. Моделирование траекторий косых лучей в ступенчатом ОВ

С помощью разработанного алгоритма были смоделированы траектории косых лучей в кварц-полимерном ОВ с диаметром сердцевины 400 мкм при различных условиях возбуждения (показатели преломления n_c = 1.456 и n_{sh} = 1.39).

На рис.3 представлены результаты расчета траектории косого луча, точка падения которого на торец ОВ смещена на расстояние x_s = 20 мкм; угол падения θ = 0.4 рад, длина волокна L = 46 мм. В общем случае сум-

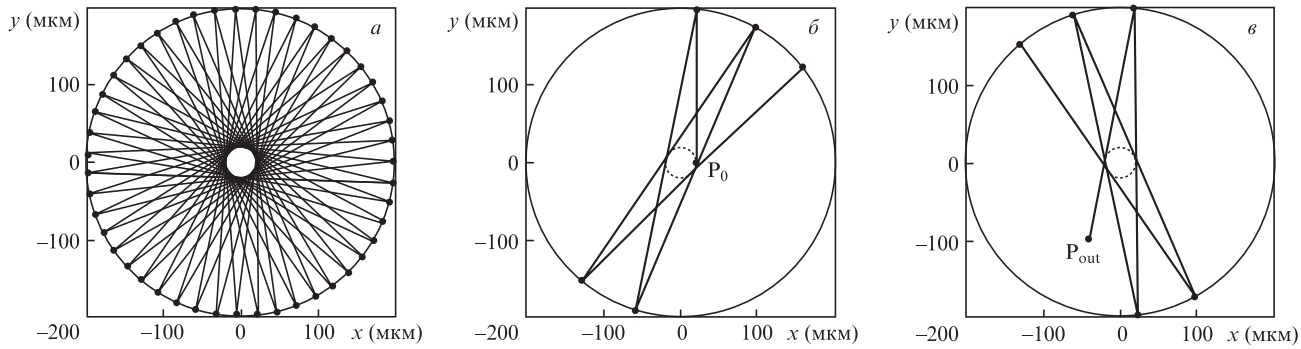

Рис.3. Траектория обычного косого луча при θ = 0.4 рад, L = 46 мм и x_s = 20 мкм: проекция полной траектории (*а*), а также проекции начальных (*б*) и конечных (*в*) лучей траектории.

марная проекция траекторий отдельных лучей (рис.3,*а*) представляет собой несимметричную многолучевую звезду с каустикой в виде окружности радиусом $r = x_s$. Каждый луч касается этого круга внешним образом, не заходя в него. Представлены также более подробные проекции траекторий для начальных и конечных отражений луча (рис.3,*б* и *в*).

Проекции траекторий луча при смещениях $x_s = 50$ и 120 мкм показны на рис.4. Качественно они не отличаются от проекций, полученных при $x_s = 20$ мкм, но имеют большие размеры каустики.

При определенных значениях смещения x_s проекции траекторий представляют собой симметричные звезды с различным числом углов-вершин независимо от длины ОВ. Это происходит, когда отношение углов $2\pi/(4\gamma)$ равно целому натуральному числу k ($k = 2, 3, 4\ldots$).Такие траектории условно назовем «резонансными», для них смещения x_s рассчитываются по формуле

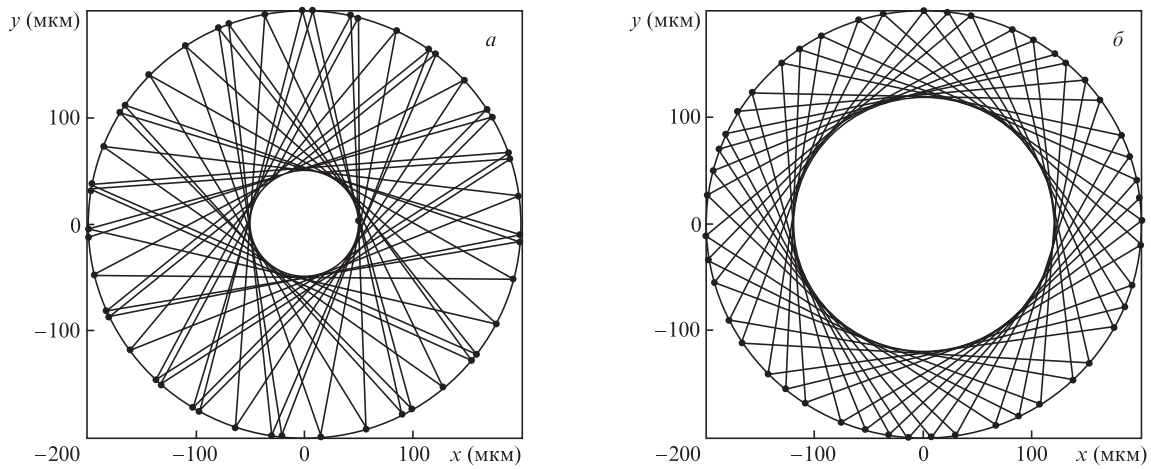

Рис.4. Проекции траекторий обычных косых лучей при $x_s = 50$ (*а*) и 120 мкм (*б*); $\theta = 0.4$ рад, $L = 46$ мм.

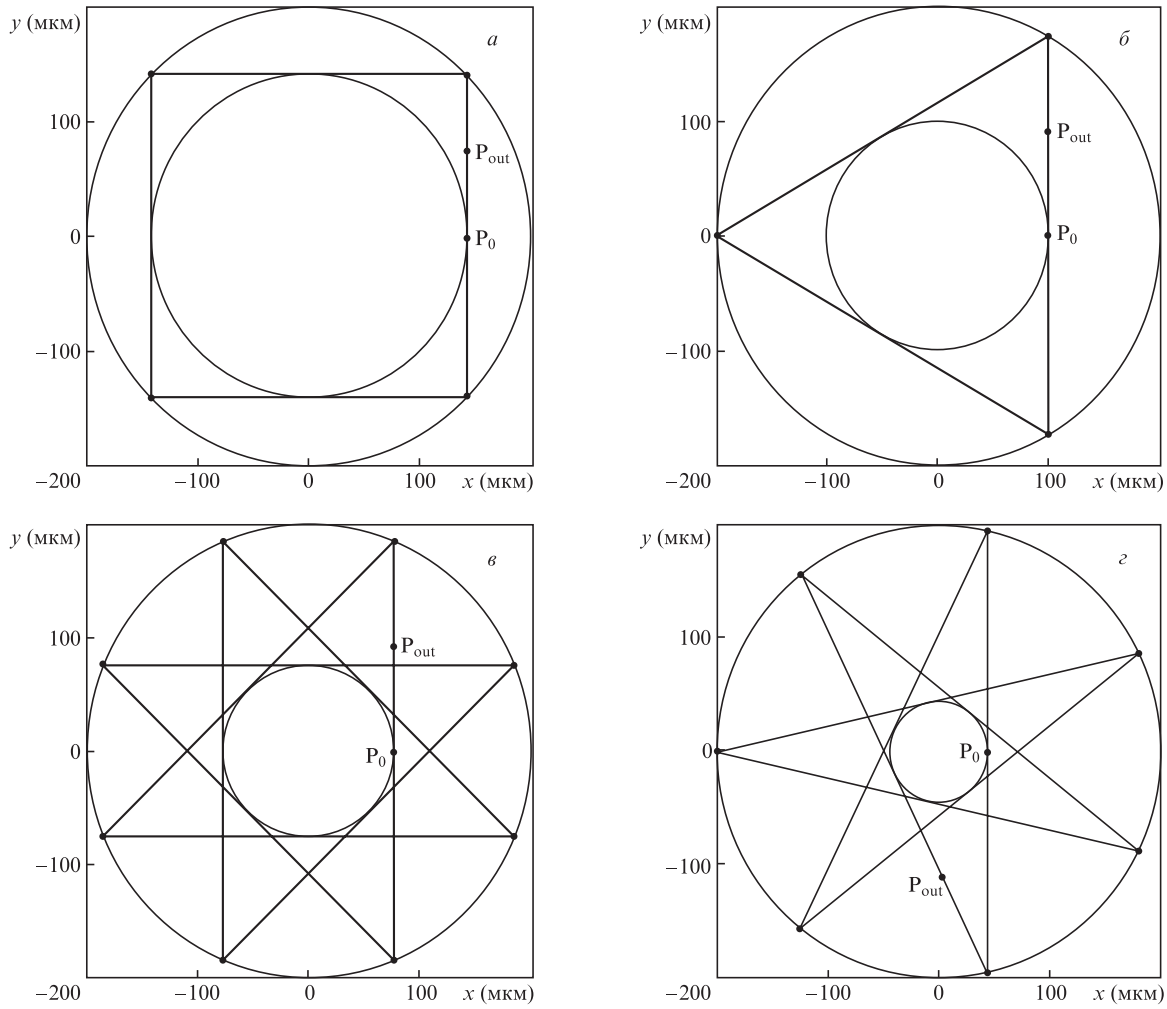

Рис.5. Резонансные траектории: *а* – $x_s = 141.421$ мкм ($k = 2$); *б* – $x_s = 100$ мкм ($k = 3$); *в* – $x_s = 76.537$ мкм ($k = 4$); *г* – $x_s = 44.504$ мкм ($k = 7$).

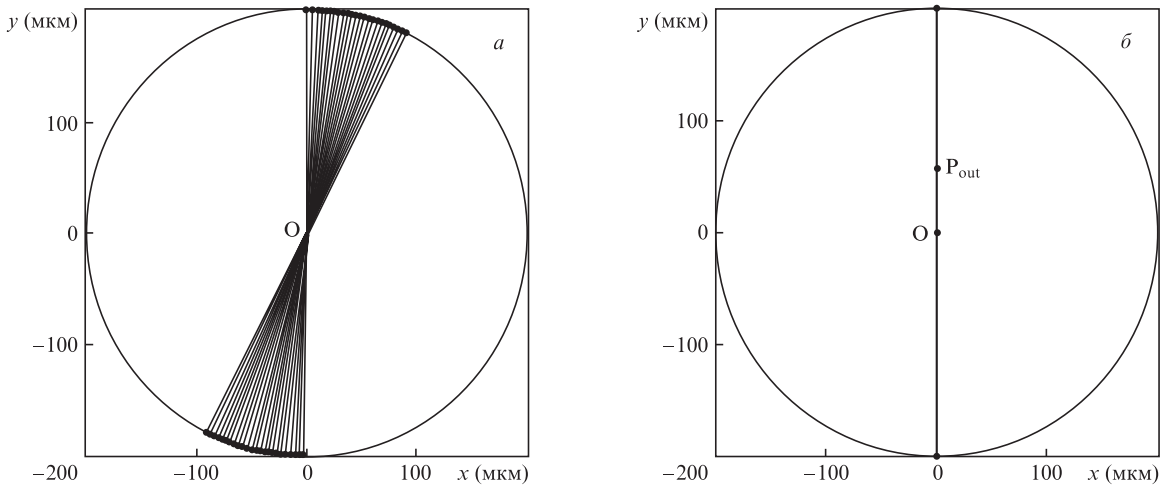

Рис.6. Проекции траекторий в случае x_s = 2 мкм (косой луч) (*а*) и x_s = 0 (меридиональный луч) (*б*) при θ = 0.4 рад, L = 46 мм.

$$x_{sk} = \sin\left(\frac{\pi}{2k}\right)R. \qquad (19)$$

На рис.5 представлены проекции траекторий, рассчитанные для k = 2, 3, 4 и 7. При незначительном отклонении величин x_s от резонансных значений (порядка десятых долей процента) звездные траектории «размазываются», сохраняя при этом характерные очертания (рис.5,*г*). Отметим, что при нечетном k звезда содержит k углов-вершин, при четном – $2k$.

На рис.6 показаны проекции траекторий для x_s = 2 мкм ($x_s \ll R$) и x_s = 0. В первом случае в силу малости угла β вершины звезды близко расположены друг к другу. При малой длине волокна они не заполняют полный азимутальный угол 2π, и проекция траектории представляет собой двойной «веер». В случае x_s = 0 проекция траектории представляет собой прямую линию, проходящую через центр торца ОВ, что соответствует меридиональным лучам.

5. Качественная экспериментальная проверка разработанного алгоритма

Экспериментальная проверка разработанного алгоритма проводилась путем регистрации распределений интенсивностей излучения гибридных мод в ближнем поле (на выходном торце ОВ) и сравнения их с типичными расчетными топологиями косых лучей. Схема эксперимента приведена на рис.7.

Излучение второй гармоники непрерывного (50 мВт) линейно поляризованного лазера на $YAG:Nd^{3+}$ вводилось в ОВ через объектив, настроенный соосно с волокном. Для варьирования угла падения пучка θ на входной торец ОВ лазер был установлен на юстировочном столике, который осуществлял регулируемый сдвиг δ оси лазерного пучка относительно оси объектива в горизонтальной плоскости. При отсутствии сдвига ($\delta = 0$) сфокусированный пучок падал в центр торца ОВ под углом θ = 0. Введение сдвига ($\delta > 0$) приводило к увеличению угла θ от исходного нулевого значения до $\theta > 0$. Зависимость угла падения θ от сдвига δ аппроксимировалась формулой $\alpha(\delta) \approx \theta_m\delta/\delta_m$, где δ_m = 6 мм – максимально допустимый сдвиг, θ_m = 23.6°. Диаметр сфокусированного пучка $d_l \approx$ 16 мкм, его угловая расходимость ~1.7°.

Для возбуждения гибридных мод точку падения пучка на входной торец ОВ смещали от его центра в вертикальном направлении на расстояние $x_s \in (0, D/2 - d_l/2)$, где D – диаметр сердцевины ОВ. Это осуществлялось с помощью механического юстировочного узла *5*, на котором был закреплен входной торец ОВ. Юстировочный узел имел двухкоординатную угловую юстировку в горизонтальной и вертикальной плоскостях и трехкоординатную линейную подачу в направлениях x, y и z. При этом определяющей из регулировок узла была линейная подача в вертикальном направлении (y-подача). Линейные подачи в x- и z-направлениях, а также угловые регулировки γ и Δ использовались для подстроек.

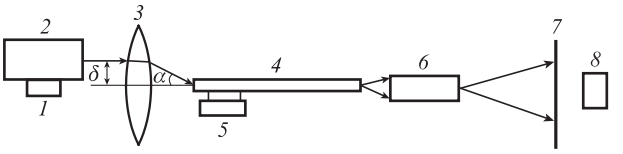

Рис.7. Схемы ввода излучения в ОВ и регистрации распределений интенсивностей излучения возбужденных гибридных мод в ближнем поле (на выходном торце ОВ):
1 – столик сдвига оси лазера относительно оси объектива в горизонтальной плоскости; *2* – лазер LG 303 (λ = 532 нм); *3* – объектив ($10^{\times}$, 0.4); *4* – исследуемое ОВ (кварц-полимерное ОВ с диаметром сердцевины 400 мкм); *5* – юстировочный узел с трехкоординатной линейной подачей и двухкоординатной угловой регулировкой входного торца ОВ; *6* – микроскоп; *7* – бумажный экран; 8 – цифровая фотокамера.

Для регистрации поля в ближней зоне микроскоп *6* был настроен на выходной торец ОВ. В этом случае выходящие из ОВ лучи формировали на бумажном экране *7* увеличенное изображение торца, которое снималось цифровой камерой *8*, Расстояние от окуляра микроскопа до экрана составляло 30 – 50 см.

На рис.8 приведены фотоснимки распределений интенсивности излучения гибридных мод, полученные при различных условиях ввода излучения, а также их расчетные аналоги (проекции траекторий). Видно, что экспериментально снятые распределения интенсивностей и их расчетные аналоги топологически похожи друг на друга; хорошо просматривается зависимость каустики излучения от условий ввода. Получены распределения, похожие на проекции траекторий обычных косых лучей (рис.8,*а*), на «размытую» пятиконечную звезду (рис.8,*в*) и на двойной «веер» (рис.8,*д*). Это качественно подтверждают результаты проведенного теоретического анализа.

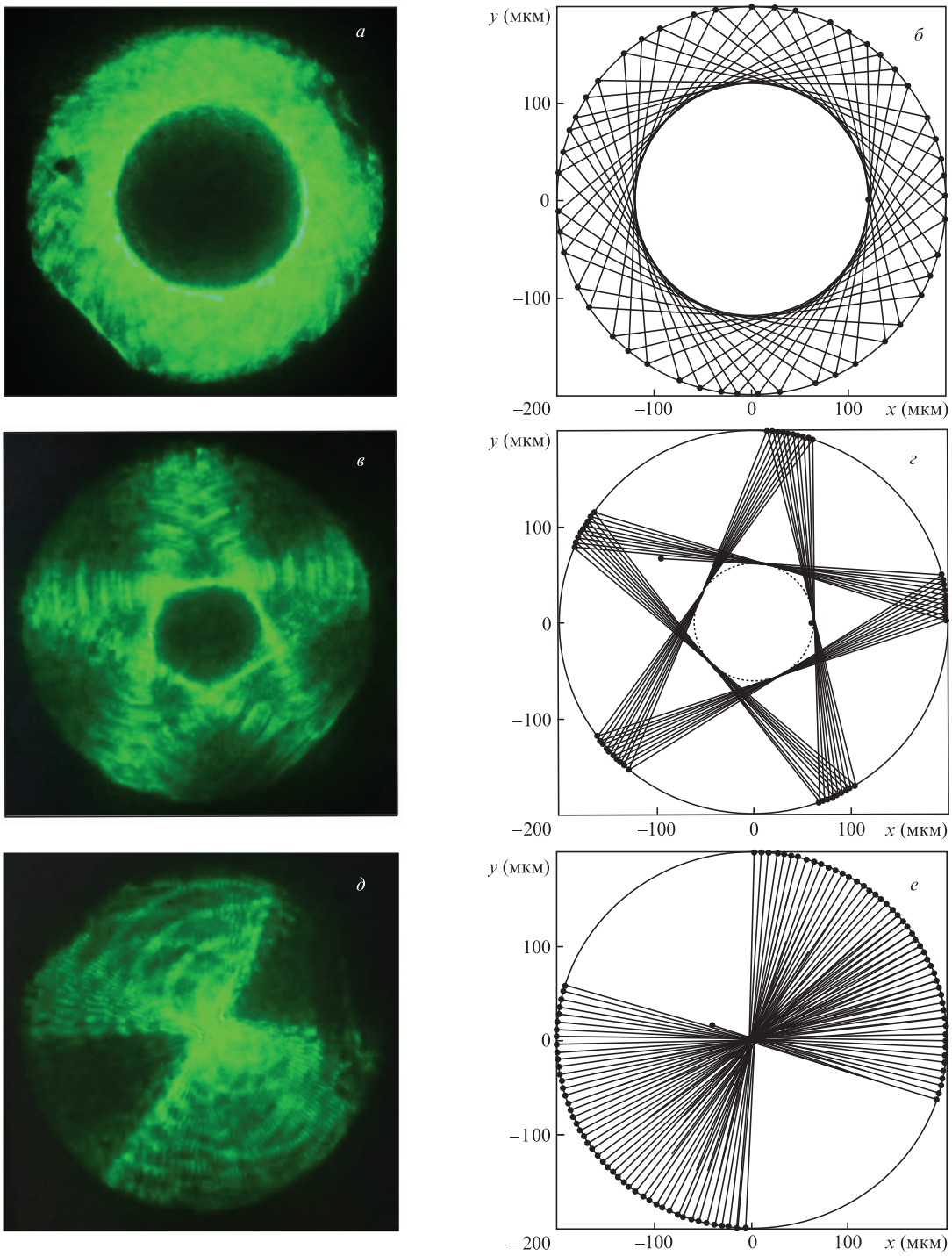

Рис.8. Фотоснимки распределения интенсивности излучения с λ = 532 нм на выходном торце ОВ КП-СИЭЛ/400 мкм длиной 10 см при различных условиях ввода излучения (*а*, *в*, *д*) и расчетные аналоги экспериментальных изображений (*б*, *г*, *е*):
а – δ = 5 мм, $x_s \approx 110$ мкм; *б* – обычная (кольцевая) проекция траектории косого луча; *в* – δ = 5 мм, $x_s \approx 65$ мкм; *г* – проекция, похожая на пятиконечную звезду; *д* – δ = 5 мм, $x_s \approx 10$ мкм; *е* – проекция, похожая на двойной «веер».

Отметим, что в работах по возбуждению многомодомых ОВ [8–12], близких по тематике к настоящей работе, анализ особенностей каустики косых лучей не проводился.

6. Выводы

1. В рамках модели геометрической оптики разработаны два варианта алгоритма расчета траекторий косых лучей в оптическом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления. Первый (трехмерный) вариант сводится к последовательному расчету координат точек отражения луча в векторной форме; во втором (двумерном) варианте сначала рассчитываются поперечные координаты всех точек отражения, затем – продольные (осевые) координаты.

2. С помощью разработанного алгоритма смоделированы траектории косых лучей в оптическом волокне с диаметром сердцевины 400 мкм при различных условиях возбуждения. Установлены характерные топологические виды проекций траекторий луча на торец волокна, среди

которых выявлены так называемые резонансные проекции.

3. Проведена экспериментальная проверка разработанного алгоритма расчета при возбуждении (λ = 532 нм) оптических вихрей в кварц-полимерном оптическом волокне с диаметром сердцевины 400 и 600 мкм. Результаты экспериментов качественно подтвердили проведенные расчеты.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН (№ 075-01110-23-01).

1. Короленко В.П. *Оптика когерентного излучения* (М.: изд-во МГУ, 1997).
2. Унгер Х.Г. *Планарные и волоконные оптические волноводы* (М.: Мир, 1980).
3. Снайдер А., Лав Д. *Теория оптических волноводов* (М.: Радио и связь, 1987).
4. Ramachandran S., Kristensen P. *Nanophotonics*, **2** (5–6), 455 (2013).
5. Сойфер В.А., Котляр В.В., Хонина С.Н. *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, **35** (6), 1368 (2004).
6. Порфирьев А.П., Кучмижак А.А., Гурбатов С.О. и др. *УФН*, **192** (8), 841 (2022).
7. Вейнберг В.Б., Саттаров Д.К. *Оптика световодов* (Л.: Машиностроение, 1977).
8. Кизеветтер Д.В. *Квантовая электроника*, **38** (2), 172 (2008) [*Quantum Electron*., **38** (2), 172 (2008)].
9. Кизеветтер Д.В. *Оптический журн*., **74** (9), 20 (2007).
10. Кизеветтер Д.В. *Оптический журн*., **75** (1), 80 (2008).
11. Ильин Н.В., Кизеветтер Д.В. *Научно-технические ведомости СПбГПУ*, № 2, 96 (2010).
12. Кизеветтер Д.В., Ильин Н.В. *Научно-технические ведомости СПбГПУ*, № 3, 151 (2013).