

Генерация коррелированных фотонных пар пятиуровневой квантовой точкой в микрорезонаторе

А.В.Цуканов

Описаны процессы генерации запутанного состояния в ходе каскадной эмиссии фотонов в полупроводниковой одноэлектронной квантовой точке. Показано, что в зависимости от выбора стартового состояния точки существуют два алгоритма, которые позволяют получить фотоны с поляризационной или пространственно-временной корреляцией в терагерцевом диапазоне частот. Для этого используется комбинированное воздействие на систему лазерных и квазистатических (штарковских) полей, а также внешние (диссипативные) оптические моды.

Ключевые слова: нанофотоника, лазеры, микрорезонаторы, квантовые точки, источник фотонов, запутанность.

1. Введение

Разработка и создание квантовых сетей предполагают существование отлаженных технологий для производства их отдельных компонент [1–3]. Поскольку носителями информации в таких сетях выступают фотоны, то необходимо уметь генерировать, транспортировать и измерять их состояние с высокой надежностью. Основными платформами для изготовления фотонных сетей служат высококачественные оптические микро- и наноструктуры на основе кремния и его соединений [4], полупроводников [5] и алмаза [6], а также их гибридные варианты [7, 8]. Особенно строгие требования предъявляются к источникам одиночных фотонов и фотонных пар, находящихся в запутанном состоянии [9–13]. Это обусловлено задачами квантовой криптографии [14, 15] и квантовой информатики [16, 17], в которых нелокальные корреляции между пространственно-разделенными кубитами играют принципиальную роль.

В течение последних двадцати лет наблюдается уверенный рост качества источников фотонов и степени их интегрированности в квантовые сети [18, 19]. Наибольшее количество успешных экспериментальных реализаций подобных устройств было связано с полупроводниковыми квантовыми точками (КТ). Фотоны последовательно испускаются при оптических переходах в КТ за счет каскадной рекомбинации биэкситона, происходящей по двум независимым путям, которые соответствуют горизонтальной и вертикальной поляризациям фотонов [20]. Ключевым условием использования фотонов, например, в алгоритме квантовой телепортации [21], является их неразличимость. Это означает, что частоты фотонов, испускаемых на каждом из этапов, должны быть максимально близкими. К настоящему времени продемонстрированы источники фотонных пар на КТ с усовершенствованным дизайном, обеспечивающим настройку частот переходов

и увеличение яркости [22–26]. Это позволило уменьшить анизотропию частот до значений менее 1 мкэВ и добиться увеличения точности воспроизведения состояния Белла до 0.97. Отметим, что данные результаты были получены для фотонов с телекоммуникационной длиной волны 1550 нм, которая характеризуется наименьшим декрементом затухания в коммерческих волноводах. Вместе с тем для ряда приложений генерация фотонных пар в субмиллиметровом диапазоне также представляет интерес. Фотоны с частотами от нескольких десятков до сотен терагерц могут использоваться для выполнения одно- и двухкубитных операций [27, 28], а также в качестве транспортных кубитов [29] в схемах с кодировкой квантовой информации в орбитальные состояния электронов КТ. Когерентное излучение квантовых каскадных лазеров на полупроводниковых гетероструктурах также относится к данному диапазону частот, а анализ фотолюминесценции КТ позволяет определить ее электронный и трионный спектры [30]. Кроме того, запутывание электронной и фотонной степеней свободы дает возможность проводить спектроскопическое измерение КТ-кубита без использования электрометров [31].

В нашей работе, в отличие от экситонной схемы, рассматривается однократно заряженная КТ, которая содержит электрон в основном состоянии зоны проводимости. Каскадная схема переходов, приводящая к генерации запутанной пары фотонов, формируется не путем добавления второго экситона в КТ, а посредством перевода электрона в ее более высокое (квадрупольное) энергетическое состояние. Частотный диапазон в десятки терагерц соответствует электронным переходам в полупроводниковых наноструктурах. Одночастичная схема позволяет избежать тех недостатков, которые присущи двухчастичной схеме, в частности исключить электрон-дырочное взаимодействие, нарушающее частотную симметрию экситонного спектра. Выбор возбужденного состояния КТ задает и тип запутывания фотонной пары. Предложенные алгоритмы реализуются при помощи лазерных импульсов и штарковских импульсов отстроек частот подсистем. Путем подбора параметров импульсов и структуры в соответствии с экспериментальными данными удалось получить для точности воспроизведения двухфотонного запутанного NOON-состояния теоретическую оценку 0.94.

А.В.Цуканов. Физико-технологический институт им. К.А.Валиева РАН, Россия, 117218 Москва, Нахимовский проспект, 34; e-mail: a-v-ts@mail.ru

Поступила в редакцию 28 февраля 2023 г., после доработки – 3 июля 2023 г.

2. Принцип каскадной генерации фотонов в заряженной квантовой точке

Рассмотрим двумерную КТ, потенциальная энергия $U(x, y)$ которой аппроксимируется экспоненциально-степенной функцией [32] и обладает симметрией отражения относительно декартовых осей X и Y :

$$U(x, y) = U_0 \exp[-(x/r_x)^{2p} - (y/r_y)^{2p}]. \quad (1)$$

Здесь U_0 – глубина потенциальной ямы; $r_x = r_y = r$ – характерная длина локализации волновой функции электрона вдоль направления $x(y)$; p – параметр, определяющий гладкость потенциала. В качестве единиц измерения здесь приняты эффективные атомные единицы: 1 ат. ед. = $Ry^* = m^* Ry/m_e \epsilon^2$ для энергии и 1 ат. ед. = $a_B^* = a_B m_e \epsilon^2/m^*$ для длины, где $Ry = 13.6$ эВ – энергия Ридберга; $a_B = 0.53 \times 10^{-10}$ м – радиус Бора; m_e – масса свободного электрона; m^* – эффективная масса электрона; ϵ – диэлектрическая проницаемость полупроводника. Для арсенида галлия GaAs ($\epsilon = 12$ и $m^* = 0.067$) имеем $Ry^* = 6$ мэВ и $a_B^* = 10$ нм. Собственные энергии и волновые функции потенциала (1) рассчитываются конечно-разностным методом второго порядка с использованием пакета Матлаб. Область вычислений, на границах которой волновые функции полагаются равными нулю, представляет собой прямоугольник с размерами $a_x \times a_y$, значительно превос-

ходящими размеры КТ. На рис.1 приведены волновые функции электрона $\Psi_n(x, y)$ ($n = g, p_{x(y)}, d, f$), отвечающие первым пяти состояниям $|g\rangle$, $|p_{x(y)}\rangle$, $|d\rangle$ и $|f\rangle$. Глубина потенциальной ямы выбрана таким образом, чтобы в КТ помещались как минимум четыре энергетических уровня. Волновая функция основного электронного состояния $|g\rangle$ с энергией ϵ_g имеет максимум в центре КТ. Однократно возбужденные p -состояния $|p_x\rangle$ и $|p_y\rangle$ (далее $|x\rangle$ и $|y\rangle$) с энергиями ϵ_x и ϵ_y являются вырожденными, а их волновые функции ориентированы вдоль соответствующих осей. Следующие состояния $|d\rangle$ и $|f\rangle$ с близкими энергиями ϵ_d и ϵ_f соответствуют двукратному электронному возбуждению и располагаются вблизи края потенциального барьера КТ. Все эти состояния связаны между собой за счет каскадных схем оптических дипольных переходов. Одноэлектронный спектр КТ, полученный для экспоненциально-степенного потенциала $U(x, y)$, представлен на рис.2 как функция глубины U_0 и размера r КТ. Как и следовало ожидать, энергии локализованных состояний зависят от указанных параметров как $\sim U_0$ и $\sim 1/r^2$, а их количество определяется «параметром ямы» $\xi = U_0 m^* r^2$. С увеличением ξ новые уровни захватываются потенциалом КТ из надбарьерного квазиконтинуума, а волновые функции глубоколежащих уровней концентрируются внутри КТ. Симметрия КТ задает правила отбора для оптических дипольных переходов между электронными состояниями.

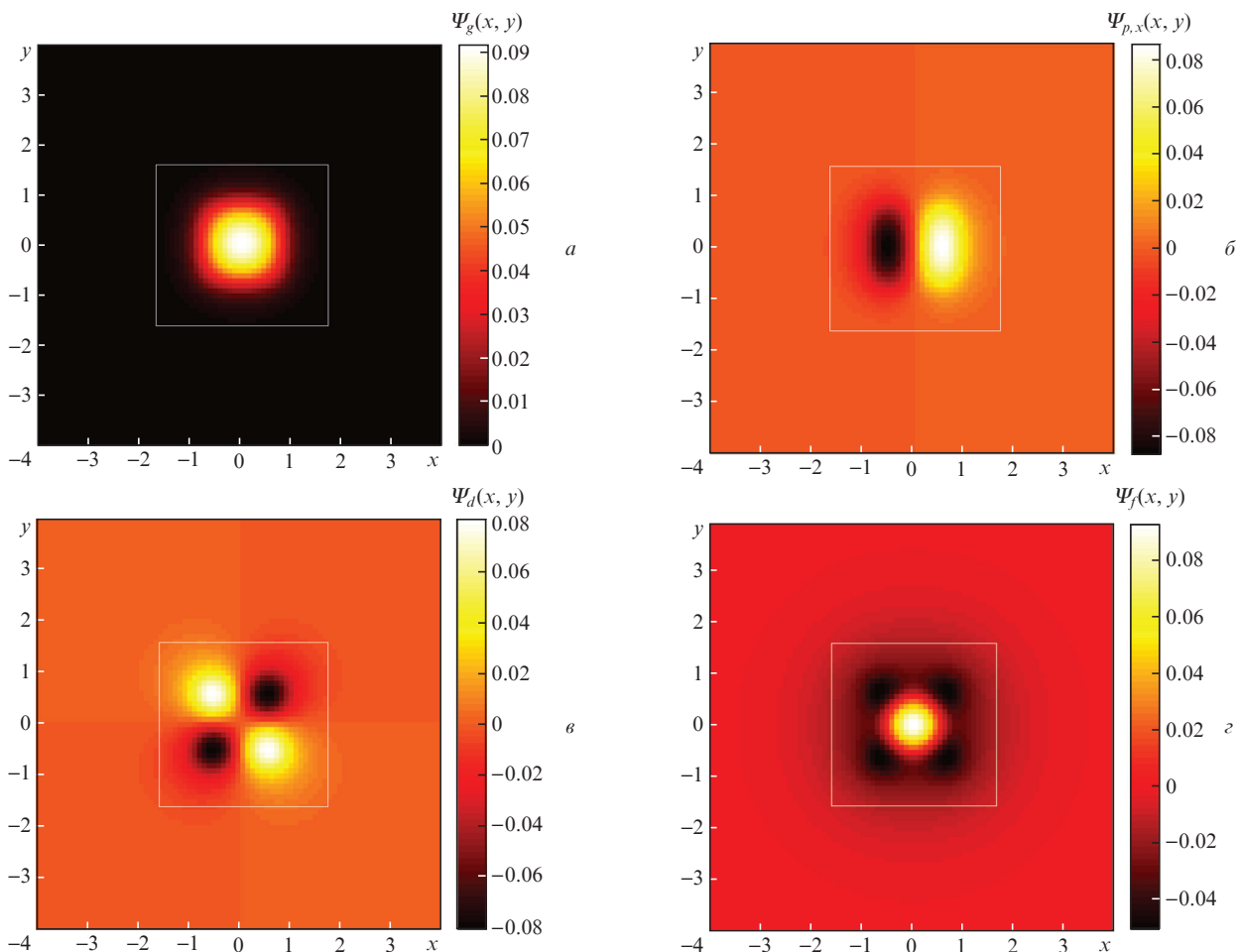


Рис.1. Волновые функции одноэлектронных состояний $|g\rangle$ (а), $|p_x\rangle$ (б), $|d\rangle$ (в) и $|f\rangle$ (г), локализованные в потенциале КТ, граница которого обозначена белым квадратом. Состояние $|p_y\rangle$ получается из состояния $|p_x\rangle$ поворотом на угол $\pi/2$. Параметры потенциала КТ даны в эффективных атомных единицах; $r_{x(y)} = 1.8$, $U_0 = -20$, $p = 5$.

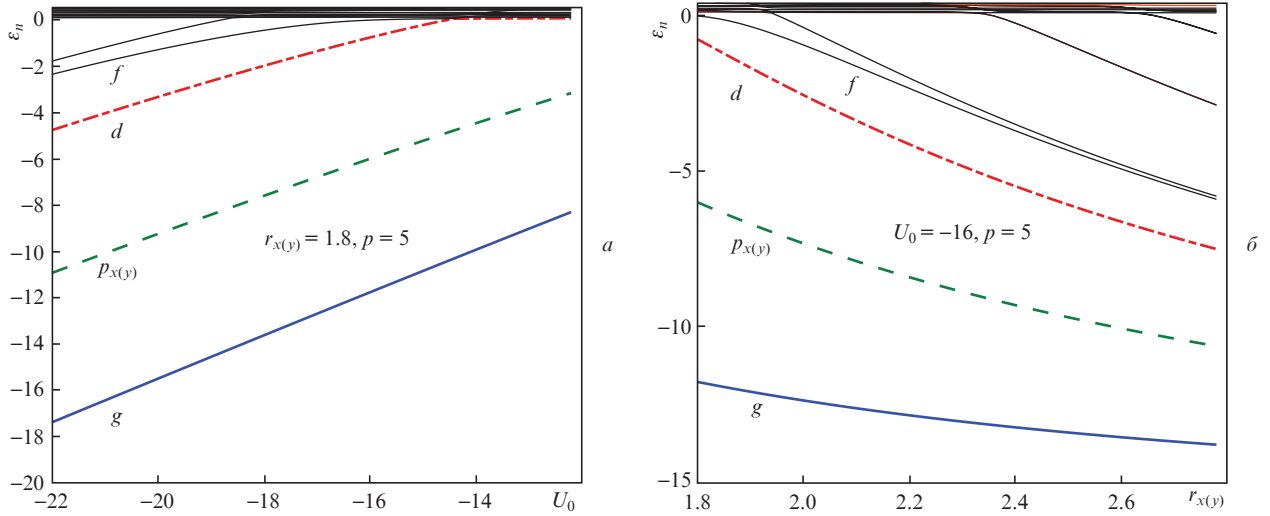


Рис.2. Зависимости энергий электронных уровней от глубины (а) и размеров (б) КТ. Волновые функции состояний с энергиями $\varepsilon < 0$, показанные на рис.1, локализованы в границах потенциала КТ. Квазиконтинуум представлен состояниями с энергиями $\varepsilon > 0$, волновые функции которых делокализованы по области вычислений с размерами $a_x = a_y = 20$. Параметры потенциала КТ даны в эффективных атомных единицах.

На рис.3 приведены зависимости матричных элементов

$$\langle m | \mathbf{d} | n \rangle = \iint \Psi_m^*(x, y) \mathbf{d} \Psi_n(x, y) dx dy$$

оператора дипольного момента $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$, отличных от нуля, от глубины и размеров КТ. Отметим их линейный рост с увеличением размеров КТ. Уровни d и f захватываются КТ при возрастании $|U_0|$, что сопровождается быстрым (для d – скачкообразным) ростом соответствующих матричных элементов с последующей стабилизацией. На основании полученных результатов можно построить схему разрешенных дипольных переходов в КТ с участием первых пяти состояний (рис.4). Для запрещенных переходов матричные элементы равны нулю вследствие нечетности подинтегральной функции, зависящей, в свою очередь, от четности/нечетности волновых функций начального и конечного состояний КТ. Мы предполагаем, что энергии дипольных состояний $|x\rangle$ и $|y\rangle$ различаются

на величину $\Delta_{x,y}$, которая может быть связана с асимметрией потенциала КТ. Для пространственной локализации генерируемых фотонов КТ помещается в высокодобротный микрорезонатор (МР), поддерживающий две ортогональные моды, напряженности полей которых поляризованы вдоль осей X и Y . Их состояния задаются векторами $|n_{c,x}\rangle$ и $|n_{c,y}\rangle$, где $n_{c,x(y)}$ – числа заполнения (количество фотонов в моде). В начальный момент времени моды находятся в вакуумном состоянии с $n_{c,x(y)} = 0$. Каждый из переходов КТ, показанных на рис.4, взаимодействует с соответствующей модой МР. Определим вектор $|k, n_{c,x}, n_{c,y}\rangle = |k\rangle |n_{c,x}\rangle |n_{c,y}\rangle$ состояния гибридной электрон-фотонной системы, где на первой позиции находится номер $k = g, x(y), d, f$ состояния КТ, а на второй и третьей – числа заполнения фотонных мод x и y . Параметр кооперативности системы (см. ниже) предполагается большим, что дает возможность когерентно трансформировать электронное возбуждение КТ в одиночный фотон МР. На начальном этапе необходимо перевести КТ из основного состояния $|g\rangle$ в одно из двукрат-

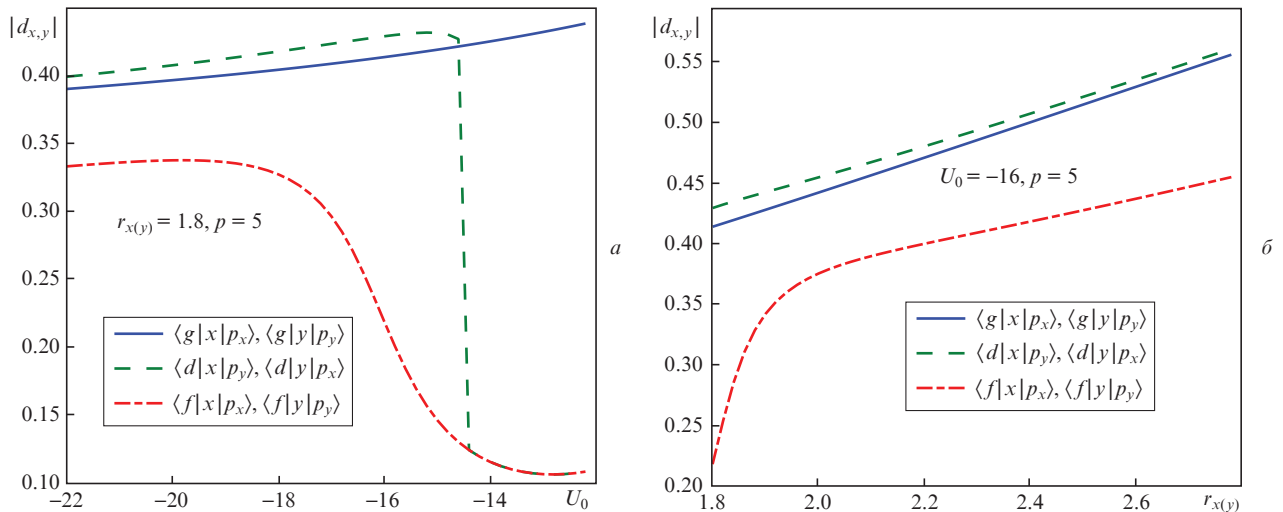


Рис.3. Зависимости абсолютных значений проекций матричных элементов оператора \mathbf{d} на декартовы оси x и y от глубины (а) и размеров (б) КТ. Параметры потенциала КТ даны в эффективных атомных единицах.

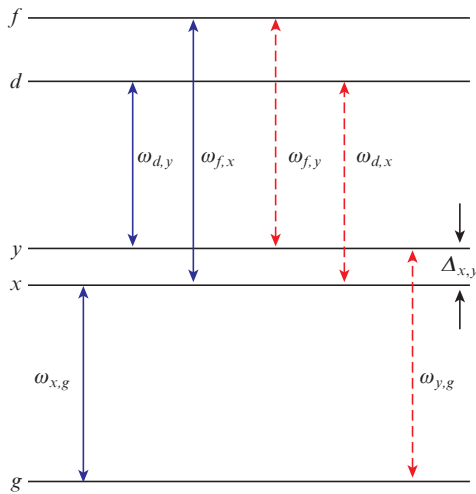


Рис.4. Схема разрешенных дипольных переходов между локализованными уровнями КТ. Сплошные (штриховые) линии отвечают переходам под действием поля с $x(y)$ -поляризацией. Энергия асимметрии $\Delta_{x,y}$ возникает из-за отклонений потенциала КТ от формы (1).

но возбужденных состояний ($|d\rangle$ или $|f\rangle$) с помощью внешних лазерных импульсов. Прямой дипольный переход между этими состояниями запрещен, поэтому процесс осуществляется через промежуточное однократно возбужденное состояние ($|x\rangle$ или $|y\rangle$). Частоты переходов $\omega_{x(y),g}$ и $\omega_{x(y),d}$ для КТ с конечной глубиной потенциала отличаются друг от друга. В этом случае резонансный перенос электрона в состояние $|d\rangle$ требует наложения на систему двух лазерных импульсов с указанными частотами. При этом частоты переходов в КТ отстроены от частот мод МР, находящихся в вакуумном состоянии. После завершения переноса лазеры выключаются. В дальнейшем будем считать, что КТ симметрична, и $\Delta_{x,y} = 0$.

Анализ схемы переходов указывает на существование двух алгоритмов генерации запутанных двухфотонных состояний. Они различаются как структурой получаемых белловских состояний, так и самим принципом запутывания. В первом варианте в качестве стартового состояния выбирается квадрупольное состояние $|d\rangle$. Особенность переходов между этим состоянием и дипольным состоянием $|x(y)\rangle$ состоит в том, что для их адресации требуется приложить электрическое поле, поляризованное вдоль оси $Y(X)$, т.е. векторы поляризации КТ и поля ортогональны. Но поскольку переходы между дипольными $|x(y)\rangle$ и основным $|g\rangle$ состояниями совершаются с участием поля, поляризованного вдоль оси $X(Y)$ параллельно вектору поляризации КТ, то по завершении каскадного эмиссионного процесса КТ испустит два фотона с ортогональными поляризациями. Несмотря на то что каждый из двух независимых каналов $|g\rangle \leftrightarrow |x\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ и $|g\rangle \leftrightarrow |y\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ приводит к одному и тому же двухфотонному состоянию $|g, 1_{c,x}, 1_{c,y}\rangle$, они тем не менее различаются порядком испускания фотонов. Другими словами, первый фотон с поляризацией $X(Y)$, рождающийся в одной из мод МР в момент времени $T_{c,1} = T_{c,x,1} = T_{c,y,1}$, «опережает» второй фотон с поляризацией $Y(X)$, который поступит в нее из КТ в момент времени $T_{c,1} + T_{c,2}$ ($T_{c,2} = T_{c,x,2} = T_{c,y,2}$). Если предположить, что фотоны покидают МР, уходя в свободное пространство или в кон-

тинуальные моды волновода за время, существенно меньшее, чем период $T_{c,2}$, то временная задержка между ними будет сохраняться. Тогда каскадный процесс разбивается на две стадии:

$$\begin{aligned} |d\rangle|0_{c,x}, 0_{c,y}\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, 0_{c,x}, 1_{c,y}\rangle + |y, 1_{c,x}, 0_{c,y}\rangle) \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|g\rangle(|1'_{c,x}, 1_{c,y}\rangle + |1_{c,x}, 1'_{c,y}\rangle), \end{aligned} \quad (2)$$

где штрихом отмечены «запаздывающие» фотоны. Такой подход к получению несепарабельных состояний известен как запутывание при помощи временных интервалов (time-bin entanglement) [33–36]. Здесь учтено, что оба перехода в силу симметрии КТ являются эквивалентными, и поэтому характеризуются одинаковым временем трансформации. Время, которое необходимо затратить на прямой и обратный процессы, складывается из времен $T_{L,1}$ и $T_{L,2}$ лазерного возбуждения нижнего и верхнего переходов КТ, времен $T_{c,1}$ и $T_{c,2}$ рабиевской конверсии электронного возбуждения в фотон МР для этих же переходов КТ и времен $T_{k,1}$ и $T_{k,2}$ ухода фотонов из МР. Необходимо указать на то, что в time-bin-алгоритмах используется одна и та же поляризация для обоих фотонов. В этом смысле наш подход использует и поляризационное, и пространственно-временное запутывание, что, конечно, отличает его от традиционного time-bin-запутывания.

Второй вариант базируется на каскадных переходах, когда каждый из путей приводит к генерации двух одинаково поляризованных фотонов, как и в экситонной схеме. На первом этапе переходы, связывающие стартовое состояние $|f\rangle$ и однократно возбужденные p -состояния КТ, формируют запутанное электрон-фотонное состояние (поляритон), которое затем преобразуется в конечное состояние Белла. Для этого следует изменить внешний электростатический потенциал, регулирующий частоты КТ, таким образом, чтобы моды МР были выведены из резонанса с верхними переходами и введены в резонанс с нижними переходами. В результате поляритонные корреляции полностью переносятся на фотонную подсистему, и моды МР оказываются в поляризационно-запутанном бифотонном NOON-состоянии:

$$\begin{aligned} |f\rangle|0_{c,x}, 0_{c,y}\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, 1_{c,x}, 0_{c,y}\rangle + |y, 0_{c,x}, 1_{c,y}\rangle) \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|g\rangle(|2_{c,x}, 0_{c,y}\rangle + |0_{c,x}, 2_{c,y}\rangle). \end{aligned} \quad (3)$$

Оно эквивалентно состоянию, получаемому в ходе каскадного распада биэкситона в КТ, помещенной в фотонную молекулу [37].

Можно отметить сходство двух описанных подходов к запутыванию фотонов (в обоих используется поляризационное запутывание). Вместе с тем алгоритм с f -состоянием допускает хранение запутанного состояния в ортогональных модах микрорезонатора, тогда как алгоритм с d -состоянием требует вывода первого фотона из микрорезонатора до рождения второго фотона. Если этого не сделать, то в модах МР будет генерироваться сепарабельное, а не запутанное двухфотонное состояние.

3. Резонансный режим возбуждения КТ и испускания фотонов

Для описания эволюции матрицы плотности ρ гибридной системы «КТ + МР» мы воспользуемся уравнением Линдблада

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + L_{\text{rel}}(\rho) + L_{\text{deph}}(\rho). \quad (4)$$

Здесь гамильтониан H системы представляет собой сумму гамильтонианов подсистем. Гамильтониан одноэлектронной пятиуровневой КТ имеет вид

$$H_0 = \omega_{x,g} |x\rangle\langle x| + \omega_{y,g} |y\rangle\langle y| + (\omega_{d,x} + \omega_{x,g}) |d\rangle\langle d| + (\omega_{f,x} + \omega_{x,g}) |f\rangle\langle f|, \quad (5)$$

где введены частоты переходов $\omega_{m,n} = \epsilon_m - \epsilon_n$ между уровнями, а энергия отсчитывается от энергии основного состояния. Двухмодовый МР с частотами $\omega_{c,x}$ и $\omega_{c,y}$ ортогональных мод, которым соответствуют операторы уничтожения a_x и a_y , описывается гамильтонианом

$$H_c = \omega_{c,x} a_x^\dagger a_x + \omega_{c,y} a_y^\dagger a_y. \quad (6)$$

Гамильтониан взаимодействия КТ и МР в приближении Джейнса–Каммингса с учетом правил отбора для дипольных переходов (см. рис.4) представлен формулой

$$H_{\text{JC}} = [\Omega_{g,x} |g\rangle\langle x| + \Omega_{f,x} |x\rangle\langle f| + \Omega_{d,y} |y\rangle\langle d|] a_x^\dagger + [\Omega_{g,y} |g\rangle\langle y| + \Omega_{d,x} |x\rangle\langle d| + \Omega_{f,y} |y\rangle\langle f|] a_y^\dagger + \text{H.c.} \quad (7)$$

Здесь $\Omega_{k,x} = \langle x|d_x E_{c,x}|k\rangle$ и $\Omega_{k,y} = \langle y|d_y E_{c,y}|k\rangle$ ($k = g, d, f$) – энергии (частоты) Раби электрон-фотонного взаимодействия (скорости обмена одним квантом между КТ и МР). Допуская, что размеры КТ существенно меньше, чем масштаб, на котором меняются поля $E_{c,x(y)}$ мод МР, можно положить $\Omega_{k,x(y)} \approx E_{c,x(y)}(\mathbf{r} = 0)d_{k,x(y)}$. Для возбуждения электронных переходов из основного состояния КТ в стартовое возбужденное состояние используются лазеры с частотами $\omega_{L,x}$ и $\omega_{L,y}$, близкими к частотам переходов КТ. Соответствующий гамильтониан

$$H_L = [\tilde{\Omega}_{g,x} |g\rangle\langle x| + \tilde{\Omega}_{f,x} |x\rangle\langle f| + \tilde{\Omega}_{d,x} |y\rangle\langle d|] \cos(\omega_{L,x} t) + [\tilde{\Omega}_{g,y} |g\rangle\langle y| + \tilde{\Omega}_{d,y} |x\rangle\langle d| + \tilde{\Omega}_{f,y} |y\rangle\langle f|] \cos(\omega_{L,y} t) + \text{H.c.} \quad (8)$$

описывает те же переходы между уровнями КТ в классическом поле, что и гамильтониан (7) в квантовом поле. Однако, в отличие от полей МР, лазерные поля действуют в импульсном режиме, и поэтому их огибающие (как и частоты Раби $\tilde{\Omega}_{k,x(y)}$) зависят от времени. Кроме того, частоты КТ варьируются квазистатическим электрическим полем затворов за счет эффекта Штарка, а изменять частоты МР возможно при помощи пьезомеханического, температурного и химического воздействий [38–40]. Таким образом, результирующий гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 + H_c + H_{\text{JC}} + H_L. \quad (9)$$

Для удобства дальнейших вычислений перейдем в систему отсчета, связанную с лазером, который поляризован вдоль оси X , при помощи унитарного преобразования

$$D = \exp[-i\omega_{L,x} t(|x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y| + 2|d\rangle\langle d| + 2|f\rangle\langle f| + a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)]. \quad (10)$$

При этом частоты в гамильтонианах (5), (6) и (8) заменяются их отстройками $\delta_{m,n} = \omega_{m,n} - \omega_{L,x}$, $\delta_{c,x(y)} = \omega_{c,x(y)} - \omega_{L,x}$ и $\delta_{L,y} = \omega_{L,y} - \omega_{L,x}$ от частоты данного лазера:

$$H_0 = \delta_{x,g} |x\rangle\langle x| + \delta_{y,g} |y\rangle\langle y| + (\delta_{d,x} + \delta_{x,g}) |d\rangle\langle d| + (\delta_{f,x} + \delta_{x,g}) |f\rangle\langle f|, \quad (11)$$

$$H_c = \delta_{c,x} a_x^\dagger a_x + \delta_{c,y} a_y^\dagger a_y, \quad (12)$$

$$H_L = \tilde{\Omega}_{g,x} |g\rangle\langle x| + \tilde{\Omega}_{f,x} |x\rangle\langle f| + \tilde{\Omega}_{d,x} |y\rangle\langle d| + [\tilde{\Omega}_{g,y} |g\rangle\langle y| + \tilde{\Omega}_{d,y} |x\rangle\langle d| + \tilde{\Omega}_{f,y} |y\rangle\langle f|] \exp(i\delta_{L,y} t) + \text{H.c.} \quad (13)$$

Здесь, как и в гамильтониане Джейнса–Каммингса, использовано приближение вращающейся волны, предполагающее малость частот Раби по сравнению с частотами электромагнитных полей. Зависимость от времени амплитуд лазерных полей (частот Раби) имеет форму тангенциальных импульсов. Ввиду резонансного характера взаимодействия между подсистемами мы ограничимся рассмотрением тех состояний, энергия которых не превышает энергии двух фотонов.

Диссипативные эффекты, связанные с неконтролируемым уходом фотонов из МР, безызлучательной релаксацией электрона, а также дефазировкой электронных состояний КТ, учтены в марковском приближении с помощью диссипативных операторов в уравнении Линдблада,

$$L_{\text{rel}}(\rho) = \kappa_x D(a_x) + \kappa_y D(a_y) + \gamma_{x,g} D(|g\rangle\langle x|) + \gamma_{y,g} D(|g\rangle\langle y|) + \gamma_{d,g} D(|g\rangle\langle d|) + \gamma_{f,g} D(|g\rangle\langle f|) + \gamma_{d,x} D(|x\rangle\langle d|) + \gamma_{d,y} D(|y\rangle\langle d|) + \gamma_{f,x} D(|x\rangle\langle f|) + \gamma_{f,y} D(|y\rangle\langle f|) + \gamma_{d,f} D(|d\rangle\langle f|), \quad (14)$$

$$L_{\text{deph}}(\rho) = \tilde{\gamma}_x D(|x\rangle\langle x| - |g\rangle\langle g|) + \tilde{\gamma}_y D(|y\rangle\langle y| - |g\rangle\langle g|) + \tilde{\gamma}_d D(|d\rangle\langle d| - |g\rangle\langle g|) + \tilde{\gamma}_f D(|f\rangle\langle f| - |g\rangle\langle g|). \quad (15)$$

Здесь $\kappa_{x(y)}$ – скорости распада $x(y)$ -моды МР; $\gamma_{m,n}$ – скорости электрон-фононной релаксации; $\tilde{\gamma}_m$ – скорости дефазировки. Оператор $L_{\text{rel}}(\rho)$ описывает релаксационные процессы в КТ и МР, а оператор $L_{\text{deph}}(\rho)$ – процессы дефазировки в КТ. Выражение $D(O) = \rho O - [O^\dagger, \rho]/2$ моделирует распад величины, отвечающей оператору O .

Решая уравнение (4) с соответствующими начальными условиями, мы находим зависимости вероятностей ρ_{mn} заселения состояний гибридной системы от времени. Наша задача – подобрать параметры уравнения (4) таким образом, чтобы в результате получить запутанное состояние фотонной пары. Поскольку прямые переходы $|g\rangle \leftrightarrow |d(f)\rangle$ в КТ запрещены, то для инициализации стартового состояния необходимо использовать дипольные состояния $|x\rangle$ и $|y\rangle$ как вспомогательные. Если в качестве стартового выбрано квадрупольное состояние $|d\rangle$, то согласно схеме (см. рис.4) следует применить бихроматический лазерный импульс. Частоты переходов $\omega_{x(y),g}$ и $\omega_{d,y(x)}$, как и частоты Раби, сближаются с ростом ξ (для бесконечно глубокой квадратной КТ они совпадают) (рис.5). Данное обстоятельство делает возможным осуществлять заселение верхнего уровня как путем последовательной адресации двухуровневых схем $|g\rangle \leftrightarrow |x(y)\rangle$ и $|x(y)\rangle \leftrightarrow |d\rangle$ монохроматическими импульсами, так и с помощью одновременного воздействия двух импульсов в рамках трехуровневой схемы $|g\rangle \leftrightarrow |x(y)\rangle \leftrightarrow |d\rangle$. В техническом отношении первый способ выглядит более надежным, т.к. контролировать двухуровневую систему проще, чем трехуровневую. Кроме того, следует помнить, что частоты верхних и нижних переходов каскада пусть незначительно, но отличаются друг от друга. Это приведет к неполному переносу населенности во втором случае. Для выбора в качестве стартового состояния $|f\rangle$ также существует особое значение потенциала КТ ($U_0 = -15.5$ на рис.5,a), при котором частоты переходов $|g\rangle \leftrightarrow |x(y)\rangle$ и $|x(y)\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ совпадают. Однако, принимая во внимание сложность реализации трехуровневой схемы накачки, мы, как и для описанного выше альтернативного алгоритма, разобьем его на две двухуровневых схемы.

При выборе параметров, входящих в уравнения (7), (8), (11)–(15), следует ориентироваться на экспериментальные работы, в которых используются элементы рассматриваемых схем. Поскольку подавляющее большинство исследований связано с телекоммуникационным диапазоном частот, то для некоторых величин, по которым экспериментальные данные отсутствуют, мы задаем их расчетные теоретические значения. Вакуумные частоты Раби $\Omega_{g,x(y)}$ и $\Omega_{d,x(y)}$ для взаимодействующих КТ и МР

полагаем одинаковыми и равными 10^{-3} , а частоту Раби $\Omega_{f,x(y)}$ – равной 0.8×10^{-3} . При заданных параметрах GaAs-КТ (см. рис.1–4) это может соответствовать напряженностям $E_{c,x(y)}$ однофотонного поля мод МР от 1 до 10 В/см. Энергии накачки, регулируемые мощностью лазера, выбираются одинаковыми, $\Omega_{g,x(y)} = \Omega_{d,x(y)} = \Omega_{f,x(y)} = 5 \times 10^{-3}$. Блокировка того или иного перехода требует выполнения условия малости частот Раби и энергий накачки по сравнению с отстройками $\delta_{m,n}$ частот переходов КТ от частот мод МР и лазеров. Выбор максимальной величины отстроек из интервала 0.1–1 отвечает штарковским сдвигам частот КТ до нескольких мэВ. Кроме того, во избежание нежелательного попадания фотонов лазерного поля непосредственно в моды МР, мы полагаем отстройку частот лазеров и мод $\delta_{c,x(y)}$ равной 0.2.

Скорости диссипативных процессов зависят от целого ряда факторов. Для их оценки можно использовать экспериментальные значения добротностей МР, $Q = \omega/\kappa$, и времен распада КТ, $\tau_{\text{rel(deph)}} = 1/\gamma_{\text{rel(deph)}}$. Отметим, что для одной и той же КТ, синтезированной в разных типах наноструктур, скорости диссипации различаются на несколько порядков. Это обусловлено зависимостью плотности фононных мод не только от химического состава, температуры и кристаллических дефектов, но и от размеров и геометрии структуры. Например, размещая КТ в тонкой пластине [41] или в нанопроволоке [42], можно в значительной степени подавить релаксацию электрона за счет инженерии фононного резервуара и правильного выбора частот переходов КТ. Улучшение оптических свойств МР в основном определяется качеством их изготовления (шероховатостью поверхности, отклонением от расчетной формы и др.). Чтобы оценить, какие процессы – когерентные или диссипативные – преобладают в динамике гибридной двухуровневой электрон-фотонной системы, вводится новый параметр – кооперативность $C = \Omega^2/\kappa\gamma$. Применительно к многомодовому МР и/или многоуровневой КТ под кооперативностью системы обычно понимают минимальное значение данного параметра по всем возможным переходам. Если C много больше (меньше), чем единица, то система обладает высокой (низкой) степенью когерентности. Будем полагать, что $C \gg 1$, и зададим следующие величины для скоростей распада:

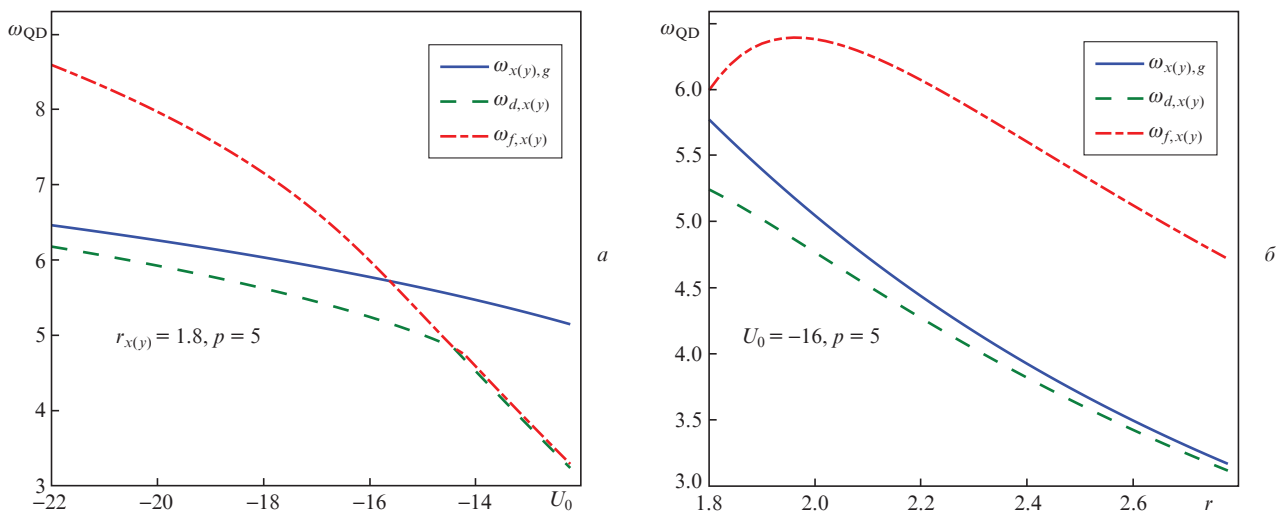


Рис.5. Зависимости частот дипольных переходов КТ от глубины (а) и размеров (б) КТ. Параметры потенциала КТ даны в эффективных атомных единицах.

$\kappa_{x(y)} = 10^{-5}$, $\gamma_{m,n} = 10^{-6}$ и $\tilde{\gamma}_m = 5 \times 10^{-6}$. Они соответствуют добротностям мод МР $Q = 10^5 - 10^6$ и временам электронной релаксации $\tau_{\text{rel(deph)}} \sim 10^{-7}$ с (GaAs) и совпадают с максимальными значениями, достигнутыми к настоящему времени в экспериментах.

Прежде чем перейти к результатам моделирования, определимся со способом варьирования отстроек частот системы. Будем считать, что частоты полей лазеров и мод МР фиксированы, а частоты КТ изменяются во внешнем электрическом поле за счет эффекта Штарка. Как и для лазерных амплитуд, зависимость отстроек от времени имеет форму тангенциального импульса, включаемого в момент времени t_0 . Его огибающая характеризуется длительностью Δt и временем включения τ :

$$\delta(t) = 0.5\delta_0 \left[\tanh\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) - \tanh\left(\frac{t-t_0-\Delta t}{\tau}\right) \right]. \quad (16)$$

Таким образом, выбирая последовательность импульсов отстроек частот КТ и лазеров (МР), можно осуществить поглощение двух фотонов классического поля и трансформировать их в квантовую запутанную суперпозицию. Вначале эти манипуляции проводятся с целью заселения начального состояния путем сканирования частот переходов КТ в окрестности частот лазеров. Затем частоты переходов последовательно вводятся в резонанс с частотами мод МР, которые предполагаются вырожденными.

На рис.6 показаны зависимости населенностей электрон-фотонных состояний системы и огибающие импульсов от времени для алгоритма с участием состояния $|d\rangle$. Напомним, что особенностью этого метода запутывания фотонов является необходимость их вывода из МР во внешнюю сеть. На начальном этапе ($0 < t < 1000$) два последовательных лазерных импульса переводят КТ из основного электронного состояния в квадрупольное.

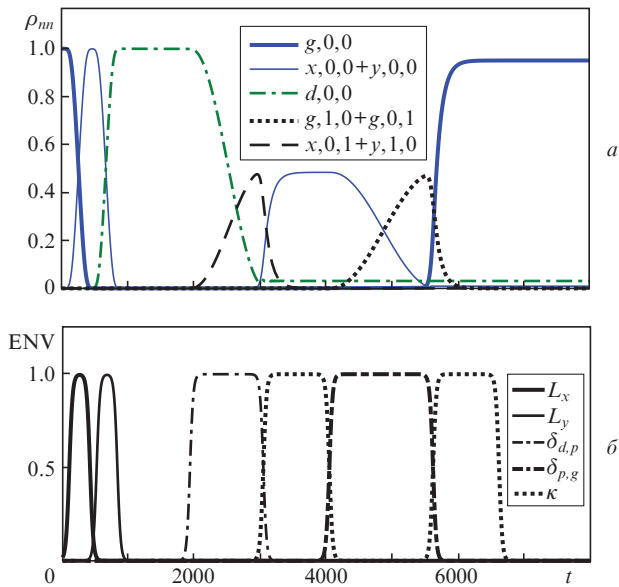


Рис.6. Зависимости от времени населенностей состояний системы МР + КТ для алгоритма запутывания фотонов по схеме временных интервалов (2) (а), а также зависимости от времени амплитуд импульсов, действующих на систему (б). В обозначениях поляритонных состояний на первой позиции стоит уровень КТ, на второй и третьей позициях – числа заполнения фотонов в x - и y -модах МР. Длительности импульсов выбраны в соответствии с формулой Раби. Эффективная атомная единица времени равна 10^{-13} с.

При этом разность частот не играет существенной роли: каждый импульс может осуществить только один переход в схеме, и в случае вырождения частот КТ для реализации трехуровневой схемы все равно необходимо использовать второй импульс с той же частотой, но ортогональной поляризацией. Интервал времени $1000 < t < 2000$ соответствует свободной эволюции системы, в течение которой выполняется подготовка ко второму этапу алгоритма. Штарковский импульс отстройки частот верхних переходов КТ и мод МР, действующий на интервале $2000 < t < 3000$, приводит к генерации однофотонного поляритона (штриховая линия на рис.6,а). Затем в момент времени $t = 3000$ происходит подключение к модам МР внешних мод волновода, характеризующихся более низкой добротностью и скоростью распада $\kappa_{\text{wg}} = 10^{-3}$. Этот процесс мы моделируем, вводя тангенциальные импульсы для скоростей диссипации фотонов. Взаимодействие с волноводом приводит к полному уходу фотона из МР во внешнюю сеть за время $3000 < t < 4000$. Далее мы повторяем процедуру генерации и отвода фотона для нижних переходов КТ. В результате к моменту времени $t = 6000$ оба фотона покидают систему, а их поляризационное состояние оказывается запутанным по схеме time-bin.

Рассмотрим теперь алгоритм генерации фотонной пары, в котором задействовано пятое состояние КТ $|f\rangle$. Поскольку поляризации состояний КТ и лазерных импульсов в этом случае совпадают (см. рис.4), то для его инициализации достаточно применить один лазерный импульс (например, поляризованный вдоль оси X). Первоначально частота нижнего перехода настроена в резонанс с частотой лазера, а частота верхнего перехода отстроена. После того как электрон переходит в состояние $|x\rangle$ при $t = 400$, штарковский импульс отстраивает частоту нижнего перехода и вводит в резонанс с полем частоту верхнего перехода. По окончании действия лазерного импульса ($t = 800$) электрон оказывается в состоянии $|f\rangle$. По истечении технического интервала времени первый штарковский импульс отстроек частот верхних переходов КТ от частот МР переводит систему в поляритонное состояние. Второй штарковский импульс, настраивающий частоты нижних переходов КТ в резонанс с частотами мод МР, трансформирует его в конечное поляризационно-запутанное состояние (3). В отличие от первой схемы (2) здесь не требуется выводить фотоны из МР. Следовательно, МР может использоваться не только для генерации, но и для хранения запутанной фотонной пары (по крайней мере, в течение времени жизни фотона в модах МР).

Анализируя зависимости населенностей состояний системы (рис.6,а и 7,а), нетрудно заметить, что при выборе времени действия $\pi/2$ -импульсов согласно формуле $T = \pi/2\Omega$ для прямоугольного импульса наблюдается отклонение данных зависимостей от канонических осцилляций Раби. В первую очередь, мы сталкиваемся с неполным переносом населенности, указывающим на неточный выбор длительности взаимодействия КТ и лазера (МР). Как показывают вычисления, уменьшение времени включения/выключения τ способствует восстановлению рабиевских кривых и увеличению вероятности переноса. Однако необходимо иметь в виду, что существует нижнее ограничение для данного параметра, определяемое быстротой действия контролирующего элемента схемы (лазера или затвора).

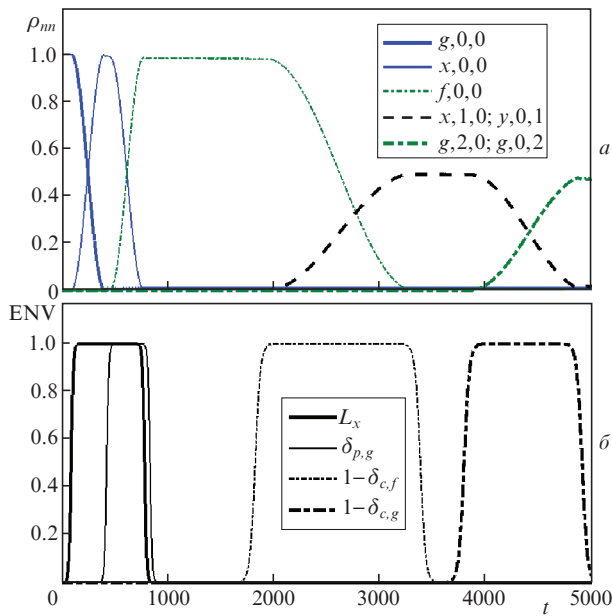


Рис.7. Зависимости от времени населенностей состояний системы МР + КТ для алгоритма запутывания фотонов по поляризационной схеме (3) (а) и амплитуд импульсов, действующих на систему (б). Длительности импульсов выбраны в соответствии с формулой Раби. Эффективная атомная единица времени равна 10^{-13} с.

Предположим теперь, что энергии дипольных состояний $|x\rangle$ и $|y\rangle$ различаются на величину $\Delta_{x,y}$, которая может быть связана с асимметрией потенциала КТ. Как и в экситонной схеме, необходимо минимизировать данный параметр, чтобы увеличить степень неразличимости испускаемых фотонов. В качестве примера такой асимметрии рассмотрим линейный сдвиг дна зоны проводимости КТ в постоянном электрическом поле, направленном вдоль оси X . Для расчета спектра КТ необходимо включить в формулу (1) для потенциала КТ дополнительное слагаемое $\Delta U = -U_{as}(x/r_x)$, создающее асимметрию. Как известно, понижение симметрии (в данном случае – с C_{4v} до C_{2v}) приводит к снятию вырождения частот переходов, которые происходят с участием p -состояний. Поскольку это нарушает неразличимость ортогонально поляризованных фотонов, то данный эффект следует минимизировать. Кроме того, внешние электрические поля вызывают не только шарковский сдвиг частот, но и генерируют разность дипольных моментов. Следовательно, в схеме переходов возникает динамический дисбаланс, связанный как с появлением отстроек $\delta\omega$ частот переходов, так и с возникновением разности $\delta\Omega$ частот (энергий) Раби.

Можно предположить, что система будет эволюционировать в соответствии с симметричной схемой, если указанные отклонения будут существенно меньше, чем частота Раби $\Omega_{x(y),g}$. При варьировании энергии U_{as} от 0 до 1 при глубине потенциала $U_0 = 20$ эти отклонения не превышают 0.2% – 0.4%. В этом случае на всем интервале варьирования U_{as} выполняется требуемое условие $\delta\Omega \ll \Omega_{x(y),g}$, налагаемое на частоту Раби. Однако, если работать с однофотонными полями, то условие $\delta\omega \ll \Omega_{x(y),g}$ соблюдается лишь для весьма небольших энергий асимметрии (менее 0.1). Это означает, что для повышения надежности источника фотонов необходимо

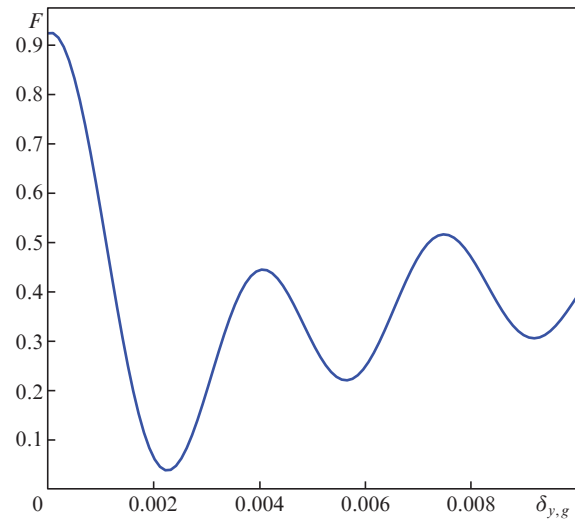


Рис.8. Зависимость точности воспроизведения от отстройки частоты перехода $|g\rangle \leftrightarrow |y\rangle$ для процесса генерации поляризационно-запутанного двухфотонного состояния.

применять методы коррекции потенциала КТ, восстанавливающие его симметрию. Вместе с тем, наложение даже небольшого внешнего поля позволяет эффективно управлять динамикой КТ, регулируя настройку ее частот в режиме двухфотонного резонанса с оптическими полями. Точность воспроизведения (мера соответствия) желаемого состояния ρ_{id} в момент времени t определяется как $F(t) = \text{tr}[\rho_{id}\rho(t)]$. Она зависит от всех параметров схемы. Построим расчет F для процесса генерации, показанного на рис.7, в конечный момент времени $t = 5000$ как функцию отстройки частот нижних переходов КТ. Видно, что ее максимальное значение $F = 0.94$ соответствует строгому двухфотонному резонансу частот ортогонально поляризованных переходов (рис.8) и определяется скоростями диссипативных процессов. Квазипериодическая зависимость F , наблюдаемая на интервале отстроек, отражает сложный характер эволюции системы, эквивалентной нескольким взаимодействующим осцилляторам.

4. Влияние диссипативных каналов на процесс генерации

Будучи свободной от эффектов, связанных с кулоновским взаимодействием двух экситонов, наша модель имеет и свои особенности. Заселение состояний $|d\rangle$ и $|f\rangle$, расположенных вблизи границы непрерывного спектра, может привести к уходу электрона в континуум в результате поглощения третьего фотона лазера или фонона(ов) кристаллической решетки (ионизация). Вероятность ионизации зависит от разности энергий состояния и нижней границы континуума, а также от амплитуды поля. Как следует из результатов работы [43], переходы в континуум практически не происходят в лазерных полях с амплитудами не выше 100 В/см. Далее, энергия оптической фононной моды в GaAs приблизительно равна 36 ± 2 мэВ (около 6 ат.ед.) и близка к частотам электронных переходов КТ (см. рис.5). В этом случае взаимодействие Фрелиха приводит к формированию когерентной суперпозиции электронных и фононных состояний – полярона [44]. Главный канал поляронного распада связан с двухчастичными ангармоническими процессами, в которых

участвуют продольные и поперечные акустические фононы с частотами от 10 до 30 мэВ [45]. Кроме того, акустические фононы вызывают дефазировку. Чтобы минимизировать данные эффекты, следует избегать перекрытия частот электронных переходов и оптической фононной моды, находясь в так называемом режиме «фононного горла». Еще одним способом «расщепления» электронных и фононных степеней свободы служит инженерия фононного спектра, приводящая к его дискретизации. Понижение размерности структуры и выбор ее геометрии могут заметно уменьшить плотность колебательных мод вблизи частот переходов в КТ, значительно увеличивая время электронной релаксации [46–50]. Более того, превращение структуры в фононный резонатор с хорошо различимыми модами открывает перспективу использования гибридных электрон-фотон-фононных состояний для получения их запутанных суперпозиций [50]. Комбинируя данные подходы к созданию источников фотонных пар со стандартными методами подавления фононных эффектов (охлаждение до субгелиевых температур, улучшение качества изготовления КТ и МР), можно существенно замедлить распад и дефазировку поляризованного состояния и приблизиться к параметрам, указанным выше.

5. Заключение

В работе рассмотрена теоретическая модель источника запутанных фотонных пар на одиночной полупроводниковой квантовой точке, управляемой классическими полями лазеров и квантовыми полями резонатора. Показано, что существуют два варианта реализации запутывания двух фотонов, использующие их поляризацию и временную задержку. Рассчитаны зависимости вероятностей переходов как функции времени, подтверждающие возможность получения запутанных фотонов в оптических твердотельных наноструктурах, обладающих высокой добротностью. Особенностью предложенных схем является принадлежность генерируемых фотонов частотному диапазону, который соответствует межподзонным электронным переходам (десятки терагерц). Дизайн устройства предполагает его совместимость с другими узлами квантового чипа. Частоты фотонов соответствуют частотам зарядовых кубитов на двойных квантовых точках [48, 49]. Это открывает возможность реализовать алгоритм квантовой телепортации между удаленными кубитами, а также использовать устройство для высокочувствительных квантовых измерений. Как следует из расчетов, результаты для экситонной и электронной схем согласуются. Для получения высокой (более 90%) вероятности генерации запутанной пары фотонов в обоих случаях следует поддерживать расщепление p -состояний не выше нескольких мкэВ. Если включить в схему дополнительный блок, преобразующий терагерцевые фотоны в телекоммуникационные фотоны [50, 51], то ее можно применять и в более распространенных сетях на основе соединений кремния.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К.А.Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме № FFNN-2022-0016 «Фундаментальные и прикладные исследования в области разработки методов высокоточного моделирования и контроля элементной базы квантовых компьютеров».

- Atatüre M., Englund D., Vamivakas N., Lee S.-Y., Wrachtrup J. *Nat. Rev. Mat.*, **3**, 38 (2018).
- Bogdanov S., Shalaginov M.Y., Boltasseva A., Shalaeв V.M. *Opt. Mater. Express*, **7**, 111 (2017).
- Kim J.-H., Aghaeimeibodi S., Carolan J., Englund D., Waks E. *Optica*, **7**, 291 (2020).
- Blumenthal D.J., Heideman R., Geuzebroek D., Leinse A., Roeloffzen C. *Proc. IEEE*, **106**, 2209 (2018).
- Dietrich C.P., Fiore A., Thompson M.G., Kamp M., Höfling S. *Laser Photonics Rev.*, **10**, 870 (2016).
- Ruf M., Wan N.H., Choi H., Englund D., Hanson R. *J. Appl. Phys.*, **130**, 070901 (2021).
- Wan N.H., Lu T.-J., Chen K.C., Walsh M.P., Trusheim M.E., De Santis L., Bersin E.A., Harris I.B., Mouradian S.L., Christen I.R., Bielejec E.S., Englund D. *Nature*, **583**, 226 (2020).
- Elshaari A.W., Pernice W., Srinivasan K., Benson O., Zwiller V. *Nat. Photonics*, **14**, 285 (2020).
- Li Y., Ding F., Schmidt O.G. *Chin. Phys. B*, **27**, 020307 (2018).
- Schimpf C., Reindl M., Basset F.B., Jöns K.D., Trotta R., Rastelli A. *Appl. Phys. Lett.*, **118**, 100502 (2021).
- Beveratos A., Abram I., Grerard J.M., Robert-Ph.I. *Eur. Phys. J. D*, **68**, 377 (2014).
- Huang Y., Dang Z., He X., Fang Z.C. *Opt. Lett.*, **20**, 032701 (2022).
- Chen X., Fu Z., Gong Q., Wanga J. *Adv. Photonics*, **3**, 064002 (2021).
- Schimpf C., Reindl M., Huber D., Lehner B., Covre S.F., Silva D., Manna S., Vyyvecka M., Walther P., Rastelli A. *Sci. Adv.*, **7**, eabe8905 (2021).
- Cavaliere F., Prati E., Poti L., Muhammad I., Catuogno T. *Quantum Rep.*, **1**, 80 (2020).
- Cavaillès A., Boucher P., Daudet L., Carron I., Gigan S., Müller K. *Opt. Express*, **30**, 30058 (2022).
- Harris N.C., Carolan J., Bunandar D., Prabhu M., Hochberg M., Baehr-Jones T., Fanto M.L., Smith A.M., Tison C.C., Alsing P.M., Englund D. *Optica*, **5**, 1623 (2018).
- Rakhlin M.V., Galimov A.I., Dyakonov I.V., Skryabin N.N., Klimko G.V., Kulagina M.M., Zadiranov Yu.M., Sorokin S.V., Sedova I.V., Guseva Yu.A., Berezina D.S., Serov Yu.M., Maleev N.A., Kuzmenkov A.G., Troshkov S.I., Taratorin K.V., Skalkin A.K., Straupe S.S., Kulik S.P., Shubina T.V., Toropov A.A. *J. Lumin.*, **253**, 119496 (2023).
- Smirnov D.S., Glazov M.M., Ivchenko E.L., Lanco L. *Phys. Rev. B*, **92**, 115305 (2015).
- Stace T.M., Milburn G.J., Barnes C.H.W. *Phys. Rev. B*, **67**, 085317 (2003).
- Rota M.B., Basset F.B., Tedeschi D., Trotta R. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **26**, 6400416 (2020).
- Reindl M., Jöns K.D., Huber D., Schimpf C., Huo Y., Zwiller V., Rastelli A., Trotta R. *Nanolett.*, **17**, 4090 (2017).
- Mantynen H., Anttu N., Sun Z., Lipsanen H. *Nanophotonics*, **8**, 747 (2019).
- Chen Y., Zopf M., Keil R., Ding F., Schmidt O.G. *Nat. Commun.*, **9**, 2994 (2018).
- Huber T., Predojević A., Solomon G.S., Weihs G. *Opt. Express*, **24**, 21794 (2016).
- Wang H., Hu H., Chung T.-H., Qin J., Yang X., Li J.-P., Liu R.-Z., Zhong H.-S., He Y.-M., Ding X., Deng Y.-H., Dai Q., Huo Y.-H., Höfling S., Lu C.-Y., Pan J.-W. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 113602 (2019).
- Openov L.A. *Phys. Rev. B*, **60**, 8798 (1999).
- Li X.-Q., Arakawa Y. *Phys. Rev. A*, **63**, 012302 (2000).
- Tsukanov A.V. *Phys. Rev. A*, **85**, 012331 (2012).
- Stinoff E.A., Scheibner M., Bracker A.S., Ponomarev I.V., Korenev V.L., Ware M.E., Doty M.F., Reinecke T.L., Gammon D. *Science*, **311**, 636 (2006).
- Цуканов А.В. *Квантовая электроника*, **51**, 84 (2021) [*Quantum Electron.*, **51**, 84 (2021)].
- Ciurla M., Adamowski J., Szafran B., Bednarek S. *Physica E*, **15**, 261 (2002).
- Brendel J., Gisin N., Tittel W., Zbinden H. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 2594 (1999).
- Martin A., Kaiser F., Vernier A., Beveratos A., Scarani V., Tanzilli S. *Phys. Rev. A*, **87**, 020301 (2013).

35. Jayakumar H., Predojević A., Kauten T., Huber T., Solomon G.S., Weihs G. *Nat. Commun.*, **5**, 4251 (2014).
36. Moiseev E.S., Moiseev S.A. *J. of Modern Optics*, **63**, 2081 (2016).
37. Dousse A., Suffczynski J., Beveratos A., Krebs O., Lemaitre A., Sagnes I., Bloch J., Voisin P., Senellart P. *Nature*, **466**, 217 (2010).
38. Цуканов А.В., Катеев И.Ю. *Микроэлектроника*, **43**, 323 (2014) [*Russ. Microelectron.*, **43**, 315 (2014)].
39. Цуканов А.В., Катеев И.Ю. *Микроэлектроника*, **43**, 403 (2014) [*Russ. Microelectron.*, **43**, 377 (2014)].
40. Цуканов А.В., Катеев И.Ю. *Микроэлектроника*, **44**, 79 (2015) [*Russ. Microelectron.*, **44**, 61 (2015)].
41. Ju W.-M., Zhu K.-D., Huang P.-H., Zheng H. *Europhys. J. B*, **72**, 417 (2009).
42. De Luca M., Fasolato C., Verheijen M.A., Ren Y., Swinkels M.Y., Kölling S., et al. *Nanolett.*, **19**, 4702 (2019).
43. Tsukanov A.V. *J. Comp. Theor. Nanosci.*, **7**, 1727 (2010).
44. Grange T., Ferreira R., Bastard G. *Phys. Rev. B*, **76**, 241304 (2007).
45. Zibik E.A., Grange T., Carpenter B.A., Porter N.E., Ferreira R., Bastard G., Stehr D., Winnerl S., Helm M., Liu H.Y., Skolnick M.S., Wilson L.R. *Nat. Mater.*, **8**, 803 (2009).
46. Dehdal S., Brandes T., Kramer B. *Phys. Rev. B*, **66**, 041301 (2002).
47. Liao Y.Y., Chen Y.N. *Phys. Rev. B*, **81**, 153301 (2010).
48. Цуканов А.В., Катеев И.Ю. *Квантовая электроника*, **48**, 641 (2018) [*Quantum Electron.*, **48**, 641 (2018)].
49. Цуканов А.В., Катеев И.Ю. *Квантовая электроника*, **48**, 1009 (2018) [*Quantum Electron.*, **48**, 1009 (2018)].
50. Цуканов А.В., Катеев И.Ю. *Квантовая электроника*, **50**, 291 (2020) [*Quantum Electron.*, **50**, 291 (2020)].
51. Tsukanov A.V., Kateev I.Yu. *Laser Phys. Lett.*, **17**, 115204 (2020).